Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Wechselwirkungen instationärer Temperatur- und Konvektionsfelder

Rainer Seitz

1978

Errata

S. 32 $$\vartheta(t) = \frac{Q}{8\pi\lambda R}\left\{ e^{R\sqrt{\alpha_0}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}} + a\sqrt{\alpha_0 t}\right) + e^{-R\sqrt{\alpha_0}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}} - a\sqrt{\alpha_0 t}\right)\right\}$$

S. 32 Abb. IO Kurven- Parameter α_0 statt α°

S. 36 $$\vartheta(t) = \frac{Q}{8\pi\lambda R}\left\{ e^{-R\sqrt{\alpha_0}} + e^{-R\sqrt{\sqrt{\frac{a^4\alpha_0^2+\omega^2}{4a^4}}+\frac{\alpha_0}{2}}} \cdot \cos\left(\omega t - R\sqrt{\sqrt{\frac{a^4\alpha_0^2+\omega^2}{4a^4}}-\frac{\alpha_0}{2}}\right)\right\}$$

S. 38 $$\vartheta(r,t) = v(r,t)\cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 t + \alpha_1 \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

S. 39 $$\vartheta(r,t) = \frac{Q'}{\varrho\cdot c}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3}\,\frac{1}{\sqrt{t}^3}\cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 t + \alpha_1\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

S. 39 $$\vartheta(t) = \int_F \frac{q'}{\varrho c}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3}\,\frac{1}{\sqrt{t}^3}\cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2t}}\cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 t + \alpha_1\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

S. 40 $$\vartheta(t) = \frac{Q'}{\varrho c}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3}\,\frac{1}{\sqrt{t}^3}\cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2t}}\cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 t + \alpha_1\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

S. 63a In Zeile 2 muß es heißen:

ϱ_1 und ϱ_2 sind die Abstände des Aufpunktes von den Quell- bzw. Senkenpunkten.

S. 7I $$\vartheta(0,t) = \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1} - \frac{K R_2\, v_0\, Q_{10}}{8\pi\lambda R_2\left(\lambda + K R_2 (v_0 + v_R)\right)} + I_0 - (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

S. 84 $$Q = 0.239 \cdot R_H \cdot J_{H_0}^2$$

Aus dem Physiologischen Institut der Universität Marburg/Lahn
Direktor: Prof. Dr. H. Hensel

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Wechselwirkungen instationärer Temperatur- und Konvektionsfelder

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der gesamten Medizin
des Fachbereiches Medizin
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von
Rainer Seitz
aus Dörnsteinbach
Marburg 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Angenommen vom Fachbereich Medizin
der Universität Marburg am 3. 3. 1978
gedruckt mit Genehmigung des Fachbereiches
Dekan: Prof. Dr. Neurath
Referent: Prof. Dr. rer. nat. L. Priebe
Correferent: Prof. Dr. med. O. Aziz

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung

II. Theoretisch-mathematische Darstellung von Temperatur- und Konvektionsfeldern

1. Theorie des konduktiven Wärmetransportes im homogenen und isotropen Vollraum

1.1. Das Temperaturfeld einer Punktquelle mit Wärmeimpuls. Fundamentallösung

1.2. Punktquelle mit konstanter Quellenergiebigkeit

1.3. Punktquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

1.4. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

1.5. Kugelflächenquelle mit konstanter Ergiebigkeit

1.6. Kugelflächenquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

2. Das Senkenfeld im Vollraum mit zeitkonstanter Senkenergiebigkeit

2.1. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

2.2. Kugelflächenquelle mit konstanter Ergiebigkeit

2.3. Kugelflächenquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

3. Das Senkenfeld im Vollraum mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

3.1. Punktquelle mit Wärmeimpuls

3.2. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

4. Stationäre Temperaturfelder einfacher konzentrischer Anordnungen von Quellen und Senken

4.1. Punktquelle mit Kugelflächensenke
4.2. Punktsenke mit Kugelflächenquelle
4.3. Quelle und Senke von Kugelflächengestalt
5. Quellen und Senken von Kugelflächengestalt mit harmonischen Ergiebigkeitskomponenten
5.1. Temperaturunabhängige Senkenergiebigkeit
5.2. Temperaturabhängige Senkenergiebigkeit. Allgemeiner Fall
5.3. Näherungslösung

III. Versuchsaufbau
1. Wärmequellen
1.1. Elektronischer Impulsgenerator
1.2. Impulsgenerator mit mechanischem Wechselschalter
1.3. Wärmeleitelemente
1.4. Elektrischer Heizkreis
2. Konduktions- und Konvektionsraum
2.1. Konduktionsmedium
2.2. Wasserkreislauf
3. Registriergeräte
3.1. Schreiber
3.2. Oszillographen

IV. Vorversuche
1. Impulsheizung mit variablen Parametern
2. Einstellung des Wasserkreislaufes

V. Resonanzversuche

VI. Wertung der Ergebnisse

VII. Zusammenfassung

VIII. Zusammenstellung der verwendeten Formelzeichen

IX. Literaturverzeichnis

I. Einleitung

Eine der wesentlichen Aufgaben des Blutes ist der Wärmetransport. Ein Teil der durch den Stoffwechsel im Gewebe erzeugten Wärme gelangt durch Konduktion und Wärmeübergang in das Blut und wird von diesem nach außen in Richtung Haut abgeführt. Diese Transportleistung des Blutes kann man sich zur Durchblutungsmessung zunutze machen. Wenn man einem umschriebenen Geweberaum von außen Wärme zuführt, wird die vom Blut von dort mit- und abgeführte Wärmemenge umso größer sein, je mehr Blut das Gewebe durchfließt und vice versa.

Bei der Fluvographie (4) führt man einem Gewebeabschnitt mittels einer mit konstanter Wärmeleistung elektrisch beheizten Sonde von geringer Raumausdehnung Wärme zu, so daß in der Umgebung der Sonde die stationäre Temperatur erhöht ist. Der Betrag der maximalen Temperaturerhöhung ϑ im Temperaturfeld wird mittels eines in der Sonde (Wärmeleitelement) eingebauten Thermoelements ermittelt. Die daraus folgende Wärmeleitzahl wird umso höher ausfallen, je größer die vom Blut abtransportierte Wärmemenge ist, die mit der Stärke der Durchblutung steigt.

Ein der Fluvographie verwandtes Verfahren ist die Impulsfluvographie. Hierbei wird das Temperaturfeld durch Impulsheizung erzeugt, deren Frequenz automatisch so geregelt wird, daß unabhängig von den Wärmetransportbedingungen die Temperaturdifferenz ϑ konstant bleibt. Die Impulsfrequenz bzw. die Heizleistung ist die durchblutungsabhängige Meßgröße.

Die eben beschriebene Methode der Fluvographie geht von der Annahme aus, daß im untersuchten Geweberaum vorwiegend av- Gefäße (Einstrom arteriell, Ausstrom venös) vorhanden sein und Wärmeübergänge ausschließlich an den Kapillaren stattfinden sollen. Sie dient daher zur Bestimmung der im Gewebe vorhandenen Versorgungsdurchblutung. Größere aa- oder vv- Gefäße ergeben zwar ebenfalls erhebliche Temperatureffekte, erschweren aber die Interpretation hinsichtlich der lokalen nutritiven Versorgung. Soll das Meßziel anders als bei der Fluvographie die Feststellung des Durchflusses durch größere Gefäße sein, sollte man zweckmäßig von Durchströmungsmessung reden.

Im Gegensatz zu den Kapillaren werden Arterien von einer pulsierenden Strömung durchflossen. Das bedeutet, daß auch die Stärke der Konvektionswirkung mit der rhytmischen Änderung der Blutstromstärke schwankt. Während des systolischen Strommaximums wird mehr Wärme abtransportiert werden, als während des diastolischen Minimums. Wenn in die Nähe einer Arterie eine konstant beheizte Sonde gebracht wird, so wird im eingeschwungenen Zustand eine periodisch schwankende Temperaturerhöhung in der Sonde resultieren, die umso niedriger sein wird, je mehr Blut die Arterie durchfließt. Man kann nun erwarten, daß besonders niedrige Werte für Amplitude und Gleichkomponente der periodischen Temperatur - Zeit - Funktion auftreten, wenn die Sonde mit gleicher Frequenz und Phase, wie in der Blutströmung vorhanden, pulsierend beheizt wird. Denn in diesem Falle trifft die Heizungswärme immer dann ein, wenn

der Blutstrom gerade besonders viel Wärme abführen kann. Falls dieser Effekt stark genug sein sollte, um die Konvektionswirkung der Arterie gegenüber der der umgebenden Kapillaren ausreichend hervortreten zu lassen, könnte er zu einer Durchströmungsmessung dienen, für die keine Gefäßeröffnung nötig wäre.

Bei der fluvographischen Messung könnte die störende Existenz von aa- und vv- Gefäßen mit pulsierender Strömung ermittelt werden, indem durch anschließende pulsierende Heizung mit strömungsgleicher Frequenz und variabler Phase auf "Resonanz" eingestellt wird. Je geringer der Resonanzeffekt ausfällt, umso besser kann das fluvographische Meßergebnis als Versorgungsdurchblutung interpretiert werden.

In der folgenden Arbeit soll nun zunächst durch theoretische Überlegungen und Berechnungen untersucht werden, ob und in welcher Höhe ein solcher Effekt zu erwarten ist. Anschliessend wird durch Experimente an einem künstlichen Wasserkreislauf gezeigt, daß ein "Resonanzeffekt", der durch Wechselwirkung zwischen einer pulsierenden Wasserströmung, die ein instationäres Konvektionsfeld hervorruft, und dem Temperaturfeld in der Umgebung einer im gleichen Rhythmus beheizten Sonde zustandekommt, existiert.

II. Theoretisch - mathematische Darstellung von Temperatur- und Konvektionsfeldern

In diesem Abschnitt sollen die theoretischen Grundlagen für die später beschriebenen Experimente dargelegt werden. Da die theoretische Darstellung des in dieser Arbeit beschriebenen Modellexperimentes als auch der physiologischen Meßsituation an einer Arterie sehr kompliziert ist, erscheint es sinnvoll, für die theoretische Untersuchung der Wechselwirkung von Temperatur- und Konvektionsfeldern zunächst die räumliche und zeitliche Struktur einfacher Felder zu beschreiben.

Im ersten Kapitel sollen verschiedene Quellen mit unterschiedlichen Ergiebigkeiten betrachtet werden. Die zusätzliche Anwesenheit von Senken im Konduktionsraum wird im zweiten Kapitel angenommen. Inhalt des dritten Kapitels ist die Einführung von Senken mit Wechselergiebigkeit. Verschiedene Anordnungen von Quellen und Senken bilden den Gegenstand des vierten Kapitels, während im fünften schließlich die Wechselwirkungen zwischen Quellen und Senken mit pulsierenden Ergiebigkeiten untersucht werden. Anhand der hierfür abgeleiteten Gleichungen wird dann die Frage beantwortet werden, ob bei Frequenz- und Phasengleichheit ein "Resonanz-Effekt" zu erwarten ist.

Mit Temperaturfeldern sind räumliche Temperaturverteilungen in der Umgebung einer Wärmequelle als Funktion der Zeit gemeint. Da die Konvektion an jedem Ort des Temperaturfeldes die dort herrschende Temperatur beeinflußt, spricht man von

Konvektionsfeldern. Die Einführung von Senken mit bestimmter Ergiebigkeit, die diskret oder kontinuierlich im Raum verteilt sind, kann zur quantitativen Beschreibung eines Konvektionsfeldes dienen. Berücksichtigt man nur die Wärmeübergänge an den Kapillaren, so wird die Senkendarstellung relativ einfach.

II. 1. Theorie des konduktiven Wärmetransportes im homogenen und isotropen Vollraum

Für die anschließenden Berechnungen soll die Annahme gelten, daß die Wärmeleitung in einem unbegrenzten Vollraum stattfindet, der überall homogen und von gleichen Wärmeleitungseigenschaften ist. Das hat zur Folge, daß Randbedingungen nur hinsichtlich der Geometrie der angenommenen Wärmequellen auftreten. In den Experimenten wird natürlich ein begrenztes Konduktionsmedium verwendet. Allerdings kann auch hier die Annahme eines Vollraumes aufrecht erhalten werden, weil das durch Heizung erzeugte Temperaturfeld infolge geringer Wärmeleistung Q sehr klein ist. Konduktion (Wärmeleitung) bedeutet, daß kinetische Energie in einem Medium durch Stoßprozesse zwischen benachbarten Molekülen weitergeleitet wird (5). Der konduktive Wärmestrom findet von Stellen höherer Temperatur in Richtung auf Stellen niedrigerer Temperatur statt und führt nach einiger Zeit, wenn keine Wärmequellen vorhanden sind, zum Temperaturausgleich. Befinden sich dagegen Quellen im Raum, die je Zeiteinheit konstante Wärmebeträge entlassen, so bildet sich ein stationäres Temperaturfeld aus. Die stationäre Temperaturerhöhung im Feld wird umso kleiner ausfallen, je größer der Abstand des Meßortes von den Quellen ist. In unendlicher Entfernung wird schließlich keine Erhöhung mehr feststellbar sein. Die Geschwindigkeit, mit der das stationäre Temperaturfeld erreicht wird, ist je nach Art des Mediums verschieden.

Ist nur eine kugelförmige Quelle mit konstanter und isotrop abgegebener Wärmeleistung vorhanden, so kann man die Temperaturerhöhung ϑ als Funktion des Abstandes r eines Temperaturmeßpunktes (im folgenden Aufpunkt genannt) vom Mittelpunkt der Kugelquelle und der Zeit t angeben. In den folgenden Unterkapiteln werden Temperaturfelder für verschiedene Arten von Wärmequellen mit unterschiedlichen Ergiebigkeiten angegeben. Dabei werden im allgemeinen Temperaturverläufe ϑ (r,t) beschrieben, bei denen im Zeitpunkt t = 0 die Quellenergiebigkeit einsetzt (Aufheizkurve).

Für die Übertemperatur ϑ als Funktion von r und t ist folgende Differentialgleichung gültig, die man auch als "Wärmebilanz" für ein infinitesimal kleines Volumenelement im Vollraum interpretieren kann (2, 3):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} ,$$

wobei unter ϑ

$$\vartheta(r,t) = u(r,t) - u_a$$

zu verstehen ist. Hierbei bedeutet u (r, t) die Temperatur im Abstand r zur Zeit t und u_a die Ausgangstemperatur. Die Größe a^2 ist eine Stoffkonstante und heißt Temperaturleitzahl. Für sie gilt:

$$a^2 = \frac{\lambda}{\varrho \cdot c} \qquad [a^2] = cm^2 \cdot s^{-1} .$$

Die einzelnen Größen bedeuten:

λ = Wärmeleitzahl $[\lambda] = cal \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$

ϱ = Dichte $[\varrho] = g \ cm^{-3}$

c = spezifische Wärme $[c] = cal \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$

II. 1.1. Das Temperaturfeld einer Punktquelle mit Wärmeimpuls. FUNDAMENTALLÖSUNG

In dem Vollraum befindet sich eine punktförmige Quelle, die einen sehr kurzzeitigen Wärmeimpuls aussendet. Die freigesetzte Wärmemenge Q' ist

$Q' = Q \cdot dt$,

wobei Q die Wärmeleistung und dt die Impulsdauer bedeutet (Abb. 1).

$[Q] = cal \cdot s^{-1}$; $[Q'] = cal$.

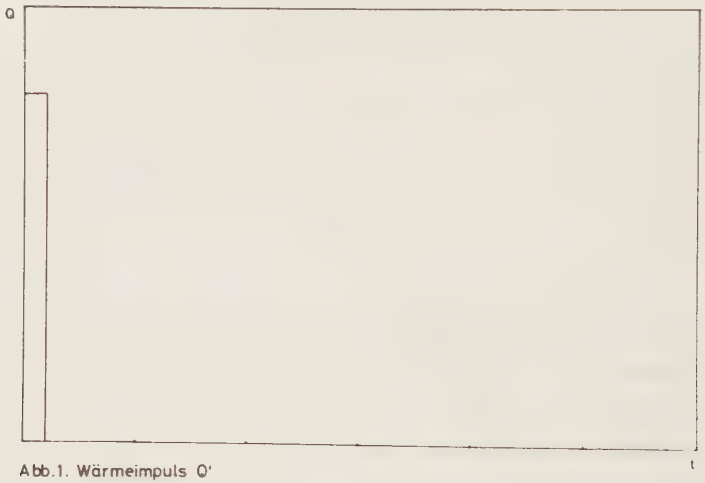


Abb.1. Wärmeimpuls Q'

Für die Temperaturerhöhung ϑ (r,t) in einem Punkt mit dem Abstand r zur Quelle und zum Zeitpunkt t ergibt sich folgende

Lösung (2), die die Differentialgleichung der "Wärmebilanz" erfüllt:

$$\vartheta = \frac{Q'}{\varrho c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.$$

Diese Darstellung kann durch Einsetzen in die Differentialgleichung verifiziert werden. Da die Temperaturfelder für ausgedehnte Wärmequellen und für Quellen mit variablem Zeitmuster der Ergiebigkeit sich hieraus durch geeignete Integration ergeben, nennt man die Lösung für die Punktquelle auch Fundamentallösung.

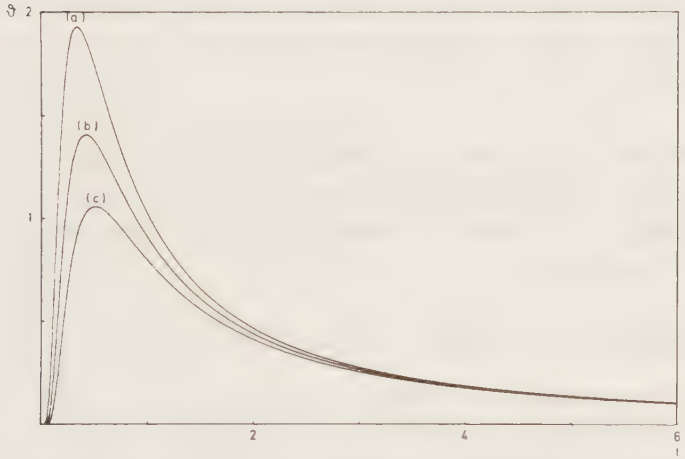


Abb. 2. Temperaturverläufe in drei verschiedenen Abständen r von einer Punktquelle, die einen Wärmeimpuls Q' im Zeitpunkt t=0 entläßt
r = 0,045 cm, 0,05 cm, 0,055 cm (a,b,c)
$\frac{Q'}{\varrho c} = 2{,}39 \cdot 10^{-3}$ cal, $a^2 = 10^{-3}$ cm$^2 \cdot$ s^{-1}

Setzt die Punktquelle fortlaufend mit zeitvariabler Ergiebigkeit Wärme frei, so wird ihre Ergiebigkeit im Zeit-

punkt τ mit $Q(\tau)$ bezeichnet werden, wobei die Quelle zur Zeit τ im Zeitelement $d\tau$ die Wärmemenge $Q(\tau)d\tau$ verläßt. Für das Temperaturfeld $\vartheta(r, t)$ nach Beginn der Heizung in $t = 0$ folgt durch zeitliche Integration der Fundamentallösung

$$\vartheta(r,t) = \int_0^t \frac{Q(\tau)}{g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau .$$

Wenn die Quelle nicht auf einen Punkt beschränkt ist, sondern eine räumliche oder flächenhafte Struktur besitzt, kann man sie sich in viele einzelne Punktquellen zerlegt denken. Da nicht vorausgesetzt werden soll, daß deren Wärmeleistungen überall gleich sind, hängt die Ergiebigkeit an einer bestimmten Stelle der Gesamtquelle von den Koordinaten dieser Stelle ab.

Wenn V' bei räumlicher und F' bei flächenhafter Verteilung die Koordinaten der Punktquellen sein sollen, ist die Wärmeleistung der Gesamtquelle zusammengesetzt aus den Punktquellenergiebigkeiten

$$Q = q(V', \tau)\,dV' \qquad \text{bzw.} \qquad Q = q(F', \tau)\,dF' .$$

Mit q ist die spezifische Wärmeleistung, bezogen auf die Einheit der Fläche bzw. des Volumens, bezeichnet (eine Zeichenunterscheidung erübrigt sich hier).

$$[q] = cal \cdot s^{-1} \cdot cm^{-3} \quad \text{bzw.} \quad [q] = cal \cdot s^{-1} \cdot cm^{-2} .$$

In einem beliebigen Punkt, der als Aufpunkt bezeichnet wird, ist zum Zeitpunkt t zu bestimmen. Da aufgrund der zunächst angenommenen inhomogenen Verteilung der Punktquellen über die Gesamtquelle kein radialsymmetrisches

Temperaturfeld erwartet werden kann, (Koordinatenursprung r = 0 beliebig), ist nicht nur der Abstand r zu den Punktquellen, sondern auch die räumliche Lage des Aufpunktes zu berücksichtigen. Dessen Koordinaten sollen in abgekürzter Form mit V bzw. F bezeichnet werden, wobei sich z.B. sphärische Koordinaten verwenden lassen in der Form

$$V: r, \theta, \varphi.$$

r = radialer Abstand vom Koordinatenursprung
θ = Polwinkel
φ = Azimutwinkel.

Für die Koordinaten der Punktquellen V'gilt Entsprechendes.

Die Integration der Fundamentallösungen aller Punktquellen über die volle geometrische Ausdehnung der Gesamtquelle lautet somit in einer allgemeinen Form:

$$\vartheta(V,t) = \int_{V'} \bar{\vartheta}(V',V,t)\,dV' \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(F,t) = \int_{F'} \bar{\vartheta}(F',F,t)\,dF'$$

bei räumlicher (V') und flächenhafter Ausdehnung (F').

Aus dieser Darstellung lassen sich in einfacher Weise die später behandelten Fälle ableiten (Kugelflächenquelle), wobei als wesentliches und einfaches Merkmal für die Lösung die alleinige Ortsabhängigkeit vom Abstand r des Aufpunktes vom Koordinatenursprung zu nennen ist.

II. 1.2. Punktquelle mit konstanter Quellenergiebigkeit

Zunächst wird noch einmal eine Punktquelle betrachtet.

Diese soll eine zeitkonstante Ergiebigkeit Q besitzen,

$$Q(\tau) = Q = \text{const.}$$

Durch Einsetzen in die Fundamentallösung und zeitliche Integration folgt für das Temperaturfeld

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \, d\tau .$$

Mit der Substitution

$$x^2 = \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}$$

erhält man

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q}{4\pi\lambda r} \cdot \operatorname{erfc} \frac{r}{2a\sqrt{t}} ,$$

wobei erfc als komplementäre Fehlerfunktion bezeichnet wird. Die Darstellung ist

$$\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-x^2} \, dx .$$

Es gilt somit auch

$$\operatorname{erfc} \frac{r}{2a\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2} \, dx .$$

Abb. 3 zeigt drei Aufheizkurven einer Punktquelle mit konstanter Ergiebigkeit.

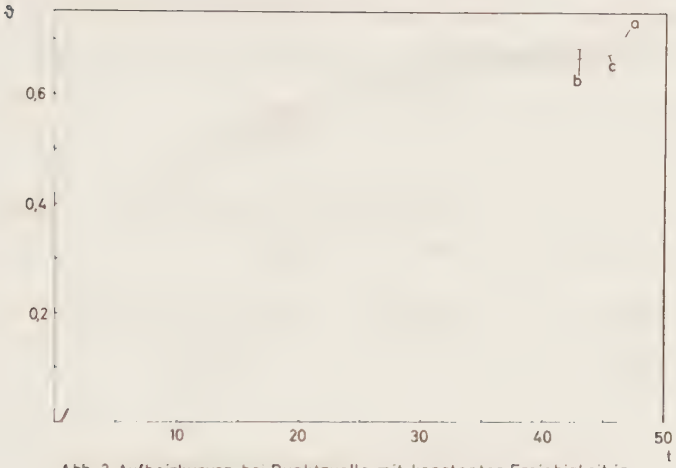


Abb 3 Aufheizkurven bei Punktquelle mit konstanter Ergiebigkeit in drei verschiedenen Entfernungen r von der Punktquelle. r = 0,2 cm, 0,22 cm, 0,25 cm, (a,b,c). $Q = 2{,}39 \cdot 10^{-3}$ cal · s^{-1}. $\lambda = 10^{-3}$ cal cm^{-1} s^{-1} K^{-1} $a^2 = 10^{-3}$ cm^2 · s^{-1}

II. 1.3. Punktquelle[6] mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

Es soll nun angenommen werden, daß die Punktquelle mit wechselnder Ergiebigkeit, die die Form einer harmonischen Schwingung hat, Wärme abgibt. Dieser Fall kann verwirklicht werden, indem ein sinusförmiger Wechselstrom die Heizenergie liefert. Hat dieser die Frequenz

$$\nu = \frac{\omega_H}{2\pi}$$

(bei der Kreisfrequenz ω_H) und die Amplitude J_{H_0}, so gilt für die Stromstärke als Funktion der Zeit

$$J(t) = J_{H_0} \cdot \cos \omega_H t.$$

Aus der Amplitude J_{H_0} und dem durchflossenen Heizwiderstand R_H läßt sich die Amplitude der Wärmeleistung berechnen,

$$Q_0 = 0{,}239 \cdot R_H \cdot J_{H_0}^2 ,$$

wobei 0,239 der Umrechnungsfaktor von der elektrischen (Watt) auf die kalorische Leistung (cal · S^{-1}) ist.

Für die Ergiebigkeit der Punktquelle ergibt sich somit

$$Q(\tau) = 0{,}239 \cdot R_H \cdot J_{H_0}^2(\tau) = Q_0 \cdot \cos^2 \omega_H \tau =$$

$$= \frac{Q_0}{2} \cdot (1 + \cos \omega \tau) ,$$

wobei $\omega = 2\omega_H$.

Um das von dieser Quelle erzeugte Temperaturfeld zu erhalten, ist folgendes Integral zu lösen

$$\vartheta(r,t) = \int_0^t \frac{Q(\tau)}{g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= \frac{Q_0}{2 \cdot g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \int_0^t \frac{1+\cos \omega t}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau .$$

Mit der Substitution

$$x^2 = \frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}$$

folgt

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi}^3 \lambda r} \cdot \int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2} \left(1 + \cos\left(\omega t - \frac{\omega r^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{x^2}\right)\right) dx .$$

Die Ausrechnung liefert

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi^3}\lambda r} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erfc} \frac{r}{2a\sqrt{t}} + \int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega r^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx \right),$$

wobei

$$\operatorname{erfc} \frac{r}{2a\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Wenn man zum Zeitpunkt t = 0 mit der Wechselheizung beginnt, wird sich zunächst die Temperatur im Aufpunkt r erhöhen; man nennt diese Phase der Aufheizung einen Einschwingvorgang. Nach einer genügend langen Heizdauer wird der Mittelwert der Wechseltemperatur nicht mehr ansteigen. Es ist der eingeschwungene Zustand (steady state) erreicht.

Da im folgenden vor allem das Verhalten des Systems im steady state interessant ist, kann die untere Grenze des noch auszurechnenden Integrals Null gesetzt werden, da bei Anwachsen von t der Grenzwert verschwindet,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{r}{2a\sqrt{t}} = 0.$$

Mit der Sustitution

$$y^2 = \frac{\omega r^2}{4a^2}$$

erhält nun das Integral die Form

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right) dx.$$

Für die Bestimmung dieses Integrals werden nach der EULERschen Formel

$$e^{\pm i} = \cos x \pm i \sin x$$

zur Erleichterung der Umformung komplexe Zahlen eingeführt. Wegen der Beziehung

$$e^{-i\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right)} = \cos\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right) - i \sin\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right)$$

gilt weiter

$$\cos\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right) = \mathrm{Re}\left\{e^{-i\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right)}\right\},$$

wobei Re für Realteil und Im für Imaginärteil einer komplexen Zahl steht.

Daraus folgt

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right) dx =$$

$$\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-i\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right)} dx\right\} = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{-i\omega t} \cdot e^{-\left(x^2 + \frac{-iy^2}{x^2}\right)} dx\right\}.$$

Mit der Substitution $-iy^2 = z^2$ folgt für den einen Faktor der Realgröße

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{z^2}{x^2}\right)} dx = F(z).$$

Bildet man von der Funktion F (z) die erste Ableitung, so erhält man

$$\frac{dF}{dz} = -2z \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{z^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}.$$

Daraus folgt mit der Substitution $t = \frac{z}{x}$ eine einfache Differentialgleichung für F (z),

$$\frac{dF}{dz} + 2F = 0.$$

Die Lösung ergibt sich durch einfache Rechnung zu

$$F = C \cdot e^{-2z} .$$

Für den Fall z = 0 wird F (z), wie aus obiger F-Darstellung folgt,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Die Integrationskonstante C lautet somit

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Ein vorläufiges Ergebnis ist

$$\int_0^\infty e^{-(x^2 + \frac{z^2}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-2z}$$

Durch Einsetzen von $z = y \cdot \sqrt{-i}$ ergibt sich weiter

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{y^2}{x^2}\right) dx = \mathrm{Re}\left\{ e^{-i\omega t} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-2y\sqrt{-i}} \right\} .$$

Es gilt $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Dies führt zu der folgenden Darstellung

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2}\cdot y} \cdot e^{-i\omega t - i\sqrt{2}\cdot y} \right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\sqrt{2}\cdot y} \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{2}\cdot y\right).$$

Der erste Summand in der ursprünglichen Gleichung für die Übertemperatur ϑ ,

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi^3}\lambda r} \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \mathrm{erfc}\, \frac{r}{2a\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega r^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx \right)$$

wird wegen Annahme des eingeschwungenen Zustandes 1, da

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{erfc}\frac{r}{2a\sqrt{t}} = \operatorname{erfc} 0 = 1 .$$

Wenn man außerdem für

$$y = r\sqrt{\frac{\omega}{4a^2}}$$

einsetzt, so erhält man schließlich das Ergebnis

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q_0}{8\pi\lambda r}\left(1 + e^{-r\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega t - r\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right)\right).$$

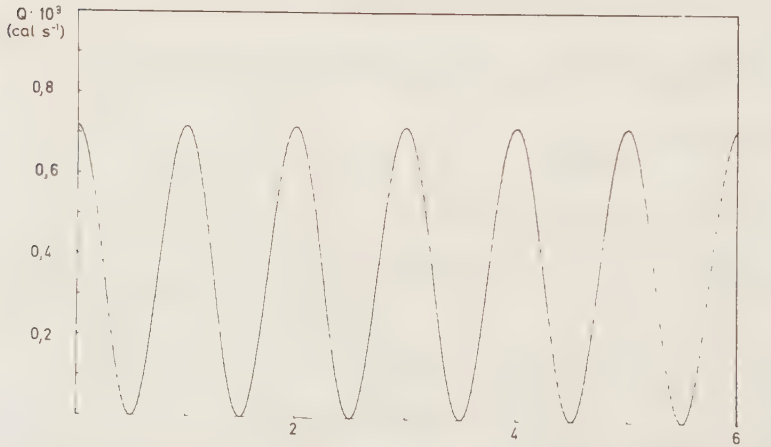


Abb. 4. Harmonische Heizleistung.
$Q_0 = 0{,}717 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cal}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 2\pi \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

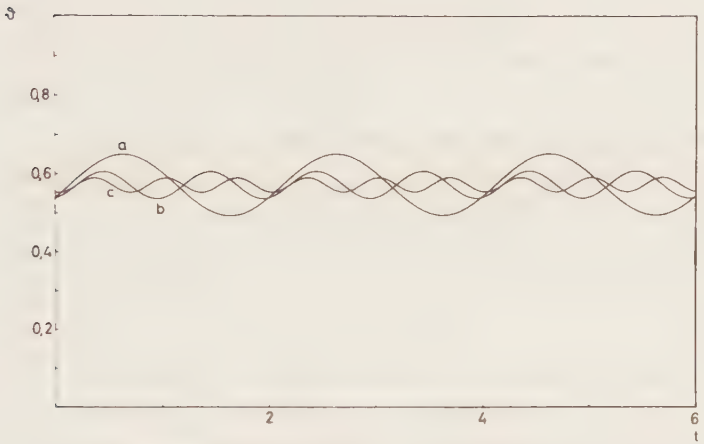


Abb 5 Temperaturverläufe im Abstand r von einer Punktquelle mit harmonischer Ergiebigkeit und drei verschiedenen Frequenzen $\omega = \pi\ s^{-1}, 2\pi\ s^{-1}, 3\pi\ s^{-1}$ (a, b, c). $Q_0 = 0{,}717 \cdot 10^{-3}\ cal \cdot s^{-1}$. $\lambda = 10^{-3}\ cal \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$. $r = 0{,}05\ cm$. $a^2 = 10^{-3}\ cm^2 \cdot s^{-1}$.

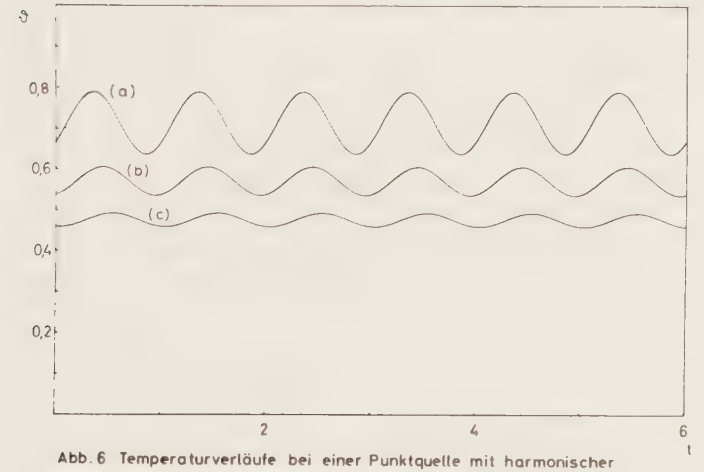


Abb. 6 Temperaturverläufe bei einer Punktquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot s^{-1}$ in 3 verschiedenen Entfernungen r: r = 0,04 cm, 0,05 cm, 0,06 cm (a, b, c).
Übrige Daten wie in Abb. 5

II. 1.4. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

Statt der bisher betrachteten punktförmigen Quelle wird nun eine Kugelflächenquelle eingeführt; dabei soll die Annahme gelten, daß auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R eine homogene Verteilung von Punktquellen gleicher Ergiebigkeit vorhanden ist, so daß im homogenen Vollraum ein radialsymmetrisches Temperaturfeld entsteht.

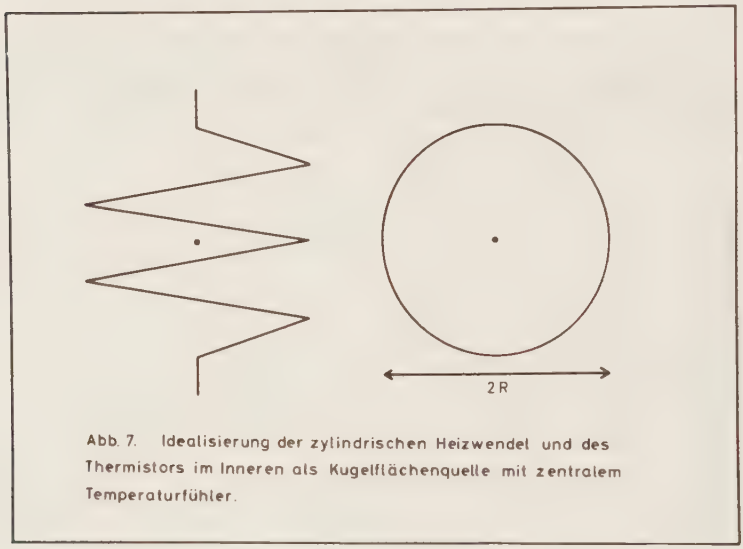


Abb. 7. Idealisierung der zylindrischen Heizwendel und des Thermistors im Inneren als Kugelflächenquelle mit zentralem Temperaturfühler.

Diese Quellengestalt ist der reellen Form der zylindrischen Heizquelle sehr angenähert (Abb. 7).

Bezeichnet man die Wärmeleistung der Flächenquelle mit Q, so erhält man für die Flächendichte q der Quellenergiebigkeit

$$q = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad [q] = cal \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}.$$

Da der Aufpunkt im Zentrum der Kugelfläche liegt, und daher von allen Quellpunkten den Abstand R hat, wird die Integration über die Quellpunktkoordinaten sehr einfach.

Es wird angenommen, daß die Flächeneinheit der Kugelflächenquelle während der Impulsdauer dt die Wärmemenge q . dt abgibt. Die Integration über die Flächenquelle F' mit dem Aufpunkt im Zentrum ist somit von der Form

$$\vartheta(t) = \int_{F'} \frac{q \cdot dt}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2t}} \, dF'.$$

Mit $\int_{F'} dF' = 4\pi R^2$ erhält man hieraus

$$\vartheta(t) = \frac{Q'}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2t}}$$

mit $Q' = Q \times dt$.

II. 1.5. Kugelflächenquelle mit konstanter Ergiebigkeit

Um von der Lösung für die Punktquelle auf die Kugelflächenlösung zu kommen, muß auch hier wieder eine räumliche Integration vorgenommen werden. Zunächst soll der allgemeine Fall betrachtet werden, daß der Aufpunkt nicht im Kugelzentrum liegt.

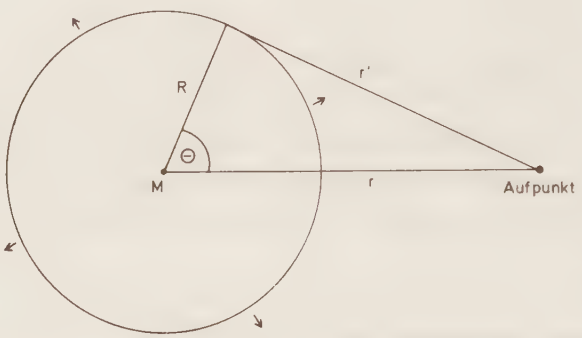


Abb. 8. Kugelflächenquelle mit Aufpunkt außerhalb des Zentrums

Mit r soll nunmehr der Abstand des Aufpunktes vom Kugelzentrum bezeichnet und als unabhängige Variable in die Funktion eingeführt werden. Der Abstand der Quellpunkte auf der Kugelfläche vom Aufpunkt sei mit r' bezeichnet. Für den Quellpunkt- Aufpunkt- Abstand r' gilt

$$r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}$$

mit θ als dem Winkel, der im Dreieck Quellpunkt-Aufpunkt-Mittelpunkt von R und r gebildet wird (Abb. 8).

Die Flächendichte der Ergiebigkeit der Quelle ist nun in $t > 0$

$$q = \frac{Q}{4\pi R^2} .$$

Durch Integration der Fundamentallösung über die Kugelfläche F' und über die Zeit τ von 0 bis t folgt für ϑ im Aufpunkt r = r

$$\vartheta(r,t) = \int_{F'} \int_0^t \frac{q}{g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\frac{r'^2}{4a^2(t-\tau)}} \, dF' d\tau .$$

Daraus folgt weiter mit

$$\frac{r'}{2a\sqrt{t}} = z \quad \text{und} \quad dF' = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

(φ = Azimutalwinkel)

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q}{4\pi\lambda R r} \cdot a\sqrt{t} \cdot \int_{\frac{|R-r|}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{R+r}{2a\sqrt{t}}} \operatorname{erfc} z \, dz =$$

$$= \frac{Q}{8\pi\lambda R r} \cdot \left[\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(e^{-\frac{(R-r)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(R+r)^2}{4a^2 t}} \right) + (R+r) \operatorname{erfc} \frac{R+r}{2a\sqrt{t}} - |R-r| \operatorname{erfc} \frac{|R-r|}{2a\sqrt{t}} \right] .$$

Für r = 0 folgt hieraus als Aufheizkurve

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{4\pi\lambda R} \cdot \operatorname{erfc} \frac{R}{2a\sqrt{t}} .$$

II. 1.6. Kugelflächenquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

Die Kugelflächenquelle soll nun eine harmonische Ergiebigkeitkomponente haben.

Die Wärmeleistung als Funktion der Zeit t ist von der Art

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2} \cdot (1 + \cos \omega t).$$

Für die Flächendichte der harmonischen Ergiebigkeit kann man schreiben

$$q(t) = \frac{q_0}{2} (1 + \cos \omega t) \quad \text{mit} \quad q_0 = \frac{Q_0}{4\pi R^2}.$$

Die Amplitude der Wärmeleistung ist

$$Q_0 = 0{,}239 \cdot R_H \cdot J_{H_0}^2,$$

wobei R_H den Heizwiderstand und J_{H_0} die Amplitude des Heizwechselstromes bedeuten.

Für die Temperaturerhöhung ϑ im Zentrum der Kugelfläche gilt in diesem Falle

$$\vartheta(t) = \int_{F'} \int_0^t \frac{q_0}{2g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 \tau^3}} \cdot \frac{1+\cos\tau}{\sqrt{t-\tau^3}} \cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}} dF' d\tau.$$

Daraus folgt für den eingeschwungenen Zustand, der sich ergibt, wenn $t \to \infty$ geht,

$$\vartheta(t) = \int_{F'} \frac{q_0}{8\pi \lambda R} \cdot \left(1 + e^{-R\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega t - R\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right)\right) dF'.$$

Die Integration über die Kugelfläche F' ist leicht durchzuführen, wenn der Aufpunkt im Zentrum liegt und damit r = 0 und r' = R gesetzt werden können. Das Ergebnis lautet

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{8\pi \lambda R} \cdot \left(1 + e^{-R\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega t - R\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right)\right).$$

II. 2. Das Senkenfeld im Vollraum mit zeitkonstanter Senkenergiebigkeit

Im Abschnitt II. 1. wurden Temperaturfelder dargestellt, die von Wärmequellen verschiedener Beschaffenheit in einem homogenen und isotropen Vollraum erzeugt werden. Ebenso, wie es im Konduktionsraum Wärmequellen geben kann, sind auch Stellen denkbar, an denen Wärme verschwindet. Solche Stellen werden als Senken bezeichnet (2).

Im durchbluteten Gewebe kann die Konvektion des fließenden Blutes in der folgenden Weise dargestellt werden. Gefäße, die arterielles oder venöses Blut durch das Temperaturfeld ohne kapillare Zwischenstrecke hindurchführen, in Kurzform aa- und vv-Gefäße genannt, sollen bei den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen werden.

Von Interesse sind nur av-Gefäße, d.h. solche, deren arterielle Anteile innerhalb des Temperaturfeldes in Kapillaren münden. Für die av-Gefäße wird angenommen, daß Wärmeübergänge Gewebe-Blut an den arteriellen Zu- und den venösen Abflußgefäßen nicht stattfinden. Nur über die Kapillarwände soll Wärme vom Gewebe in das fließende Medium übergehen und mit dem erwärmten Venenblut das Temperaturfeld verlassen. Diese Ausschließlichkeitsbetrachtung ist mit der überwiegenden Anzahl von Kapillaren im Temperaturfeld zu begründen (10).

Der Wärmeabfluß über die Kapillaren ist optimal. Wegen der geringen Kapillarlänge kann man in Näherung eine an allen Stellen ihres Verlaufs konstante Wandtemperatur annehmen.

Wenn das arterielle Blut in die Kapillare einfließt, wird wegen der positiven Temperaturdifferenz Kapillarwand - Blut dem Gewebe Wärme entzogen und die Bluttemperatur erhöht. Es läßt sich zeigen, daß noch vor dem Kapillarausgang Temperaturausgleich erreicht wird (10).

Die Wirkung der linearen Senkenstrecken kann in einer Verschmierungsoperation als die einer lückenlosen Verteilung von Punktsenken interpretiert werden. Die Vorstellung kontinuierlich verteilter Punktseken mit bestimmter Ergiebigkeit macht eine mathematische Behandlung des Problems möglich.

Die Anzahl der Kapillaren in 1 cm^3 Gewebe sei N_K, die Querschnittsfläche einer Kapillare F_K und die mittlere Geschwindigkeit des durch die Kapillare fließenden Blutes v_K. Dichte und spezifische Wärme des Blutes werden mit ϱ_B und c_B bezeichnet. Wenn die Differenz zwischen der Temperatur des ausfließenden Blutes (Temperatur der Kapillarwand) und der Temperatur des einströmenden Blutes ist, gilt für die Senkenergiebigkeit einer Kapillare, d.h. die in einer Kapillare pro Sekunde verschwindende Wärme (10):

$$Q_{S(1\,Kapillare)} = \varrho_B \cdot c_B \cdot F_K \cdot v_K \cdot \vartheta$$

Für die Senkenergiebigkeit, bezogen auf 1 cm^3 Gewebe, erhält man

$$Q_{S\,(1\,cm^3)} = q_S = N_K \cdot \varrho_B \cdot c_B \cdot F_K \cdot v_K \cdot \vartheta .$$

Die Differentialgleichung der Wärmebilanz für ein radialsymmetrisches Temperaturfeld bei Berücksichtigung einer lückenlosen Senkenverteilung lautet nun

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \alpha_o \cdot \vartheta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} .$$

Für α_o gilt

$$\alpha_o = \beta_K \cdot \nu_K \; ; \quad [\alpha_o] = cm^{-2},$$

wobei die Größe β_K durch die Blut- und Kapillarparameter in der folgenden Weise bestimmt ist:

$$\beta_K = \frac{N_K \cdot \varrho_B \cdot c_B \cdot F_K}{\lambda_G} \; ; \quad [\beta] = s \cdot cm^{-3}.$$

λ_G ist die Wärmeleitzahl des Gewebes.

II. 2.1. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

Die räumliche Verteilung von Quellen und Senken im homogenen Vollraum ist so, daß eine radialsymmetrische Temperaturverteilung folgt. Daher ist die Punktquellenlösung im Aufpunktabstand r identisch mit der Kugelflächenquellen(R)-Lösung, wenn das Zentrum als Aufpunkt gewählt wird (r = 0). Es ist nur notwendig, daß r durch R ersetzt wird.

In der in II. 2. aufgestellten Differentialgleichung wird die Temperaturdifferenz ϑ durch die Größe w sustituiert, so daß

$$\vartheta = w \cdot e^{-\alpha_o a^2 t} .$$

Die Differentialgleichung erhält damit die einfachere Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \quad .$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist für den Fall bekannt, daß sich eine Punktquelle in r = 0 befindet und einen Wärmeimpuls Q' = Qdt in t = 0 entläßt

$$w(r,t) = \frac{Q'}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \quad .$$

Für eine Kugelflächenquelle mit dem Radius R ergibt sich dann als Lösung, wenn für die Rechengröße w wieder ϑ eingesetzt wird,

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\left(\frac{R^2}{4a^2 t} + \alpha_0 a^2 t\right)} \quad .$$

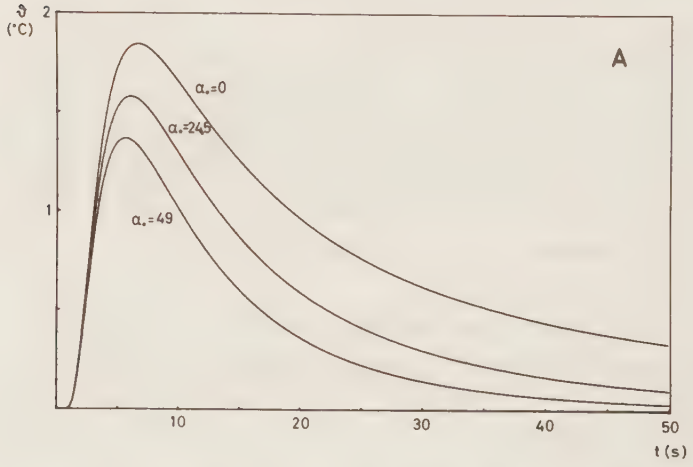


Abb. 9A. Temperaturverlauf im Zentrum einer Kugelflächenquelle (R) nach Freiwerden eines Wärmeimpulses Q' in t=0 Homogener Vollraum mit gleichmäßiger Senkenverteilung. Die drei Senkenergiebigkeitskoeffizienten α_0 sind $\alpha_0 = 0; 24,5; 49\,(cm^{-2})$, R=0,2 cm

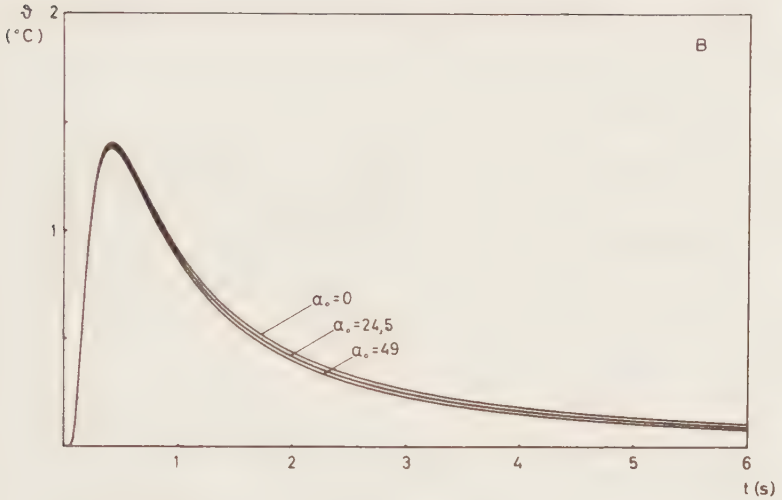


Abb. 9B. R=0,05 cm.

II. 2.2. Kugelflächenquelle mit konstanter Ergiebigkeit

Die Kugelfläche vom Radius r = R soll nun mit konstanter Ergiebigkeit Wärme abgeben,

$$Q(t) = Q = \text{const.}$$

Die Temperaturerhöhung im Zentrum zum Zeitpunkt t nach Heizungsbeginn in t = 0 erhält man durch zeitliche Integration

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\left(\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)} + \alpha_o a^2 (t-\tau)\right)} d\tau.$$

Mit den Substitutionen

$$x^2 = \frac{R^2}{4a^2(t-\tau)} \quad ; \quad y^2 = \frac{R^2 \alpha_0}{4}$$

und $$c = \frac{R}{2a\sqrt{t}}$$

folgt

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi^3}\lambda R} \cdot \int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx.$$

Zu lösen ist somit das Integral

$$\int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx = F(y).$$

Durch Differenzieren nach y erhält man

$$F'(y) = -2 \int_0^{\frac{y}{c}} e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx.$$

Mit der Rechengröße $p = \frac{y}{x}$ folgt hieraus

$$F'(y) = -2 \int_0^{\frac{y}{c}} e^{-\left(p^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)} dp.$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$F''(y) = 4y \int_0^{\frac{y}{c}} e^{-\left(p^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)} dp - \frac{2}{c} \cdot e^{-\left(c^2 + \frac{y^2}{c^2}\right)}.$$

In dieser Differentialgleichung setzt man $x = \frac{y}{p}$. Man erhält dann die einfachere Form

$$F'' + 4F = -\frac{2}{c} \cdot e^{-\left(c^2 + \frac{y^2}{c^2}\right)}.$$

Die Lösung erfolgt durch Variation der Konstanten. Die homogene Differentialgleichung hat die Lösung

$$F = c_1 \cdot e^{2y} + c_2 \cdot e^{-2y}.$$

Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt man eine y-Abhängigkeit der Integrationskonstanten c_1 und c_2 an. Dann müssen die beiden folgenden Gleichungen gültig sein,

$$c_1' \cdot e^{2y} + c_2' \cdot e^{-2y} = 0,$$

$$c_1' \cdot 2e^{2y} + c_2' \cdot 2e^{-2y} = -\frac{2}{c} \cdot e^{-\left(c^2 + \frac{y^2}{c^2}\right)}.$$

Hieraus folgt nach einfacher Rechnung

$$c_1' = -\frac{1}{2c} \cdot e^{-\left(c + \frac{y}{c}\right)^2},$$

$$c_2' = -\frac{1}{2c} \cdot e^{-\left(c - \frac{y}{c}\right)^2}.$$

Die Integration liefert

$$c_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \operatorname{erfc}\left(c + \frac{y}{c}\right) + K_1$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \operatorname{erfc}\left(c - \frac{y}{c}\right) + K_2$$

wobei unter

$$\operatorname{erfc}\left(c \pm \frac{y}{c}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c \pm \frac{y}{c}} e^{-s^2} ds$$

zu verstehen ist.

Die Konstanten K_1 und K_2 werden so bestimmt, daß für

$c = 0$

$$\int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-2y}$$

resultiert.

Als Ergebnis folgt dann

$$\int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[e^{2y} \cdot \operatorname{erfc}\left(c + \frac{y}{c}\right) + e^{-2y} \cdot \operatorname{erfc}\left(c - \frac{y}{c}\right) \right]$$

wobei erfc s = 1- erf s.

Durch Einsetzen ergibt sich somit für $\vartheta(t)$ im Zentrum einer Kugelflächenquelle mit Radius R im Vollraum mit Senken:

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{8\pi\lambda R} \left\{ e^{R\sqrt{\alpha_0}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}} + \alpha_0 a^2 t\right) + e^{-R\sqrt{\alpha_0}} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2a\sqrt{t}} - \alpha_0 a^2 t\right) \right\}.$$

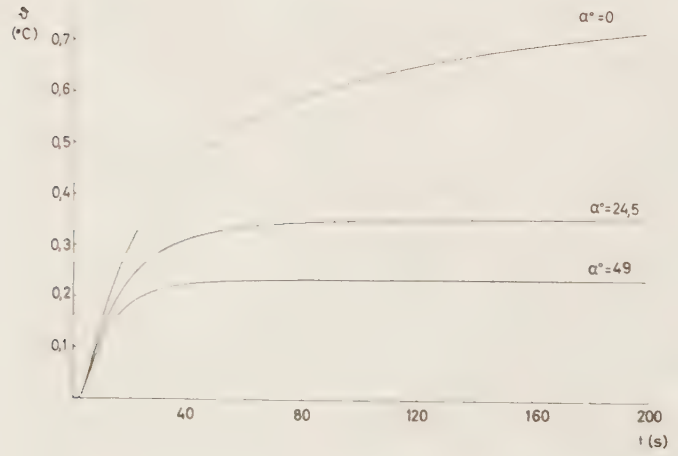


Abb.10. Temperaturverlauf im Zentrum einer Kugelflächenquelle (R) mit in t=0 einsetzender konstanter Wärmequellenergiebigkeit.

$\alpha_0 = 0;\ 24{,}5;\ 49\ (cm^{-1})$

II. 2.3. Kugelflächenquelle mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente.

Die Kugelflächenquelle soll mit einer Ergiebigkeit ausgestattet sein, die eine harmonische Komponente enthält,

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos \omega t),$$

wobei Q_0 die Amplitude der Wärmeleistung sein soll.

Für ϑ im Zentrum erhält man somit

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{2\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \int_0^t \frac{1 + \cos\omega\tau}{\sqrt{t-\tau}^3} \cdot e^{-\left(\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)} + \alpha_0 a^2 (t-\tau)\right)} d\tau.$$

Mit den schon bekannten Substitutionen

$$x^2 = \frac{R^2}{4a^2(t-\tau)} \; , \; y^2 = \frac{R^2 \alpha_0}{4} \quad \text{und} \quad c = \frac{R}{2a\sqrt{t}}$$

folgt weiter

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi^3}\lambda R} \cdot \int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \cdot \left(1 + \cos\left(\omega t - \frac{\omega R^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{x}\right)\right) dx.$$

Mit Einsatz der Größe $b^2 = \frac{\omega R^2}{4a^2}$ ergibt sich die folgende Umformung

$$\cos\left(\omega t - \frac{b^2}{x^2}\right) = \cos\omega t \cdot \cos\frac{b^2}{x^2} + \sin\omega t \cdot \sin\frac{b^2}{x^2}.$$

Es treten also folgende Integrale auf:

$$\int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} dx +$$

$$+ \cos\omega t \cdot \int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \cdot \cos\frac{b^2}{x^2} dx +$$

$$+ \sin\omega t \cdot \int_c^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{y^2}{x^2}\right)} \cdot \sin\frac{b^2}{x^2} dx.$$

Für die weiteren Berechnungen werden nun zunächst wieder komplexe Zahlen eingeführt. Es gilt

$$e^{\pm i \frac{b^2}{x^2}} = \cos \frac{b^2}{x^2} \pm \sin \frac{b^2}{x^2} ,$$

wobei $i = \sqrt{-1}$.

Man kann hierfür auch schreiben

$$\cos \frac{b^2}{x^2} = \mathrm{Re}\left\{ e^{-\frac{ib^2}{x^2}} \right\} \text{ und}$$

$$\sin \frac{b^2}{x} = - \mathrm{Im}\left\{ e^{-\frac{ib^2}{x^2}} \right\} .$$

Die Integrale lassen sich somit auch in der folgenden Weise darstellen:

$$\int_c^\infty e^{-(x^2 + \frac{y^2}{x^2})} \cdot \cos \frac{b^2}{x^2} \, dx = \mathrm{Re}\left\{ \int_c^\infty e^{-(x^2 + \frac{y^2 + ib^2}{x^2})} dx \right\},$$

$$\int_c^\infty e^{-(x^2 + \frac{y^2}{x^2})} \cdot \sin \frac{b^2}{x^2} \, dx = - \mathrm{Im}\left\{ \int_c^\infty e^{-(x^2 + \frac{y^2 + ib^2}{x^2})} dx \right\}.$$

Da im folgenden nur der eingeschwungene Zustand betrachtet werden soll, darf $t = \infty$ gesetzt werden, so daß $c = 0$ wird.

Wegen der Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-(x^2 + \frac{y^2}{x^2})} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-2y}$$

wird

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{y^2+ib^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2\sqrt{y^2+ib^2}}.$$

Für eine komplexe Zahl a + ib ist die Wurzel, wie sich durch Quadrieren prüfen läßt

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{a}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a}{2}}.$$

Also ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2+\frac{y^2+ib^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}+\frac{y^2}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}-\tfrac{y^2}{2}}\right)+i\sin\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}-\tfrac{y^2}{2}}\right)\right].$$

Durch Einsetzen in die Gleichung für $\vartheta(t)$ folgt nun

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{4\sqrt{\pi^3}\lambda R}\cdot\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot e^{-2y}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}+\frac{y^2}{2}}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\cos\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}-\tfrac{y^2}{2}}\right)\cdot\cos\omega t+\sin\left(2\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}-\tfrac{y^2}{2}}\right)\cdot\sin\omega t\right]\right.$$

Wegen $\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$ ist auch

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{8\pi\lambda R}\cdot\left[e^{-2y}+e^{-2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}+\frac{y^2}{2}}}\cdot\cos\left(\omega t-2\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+b^4}-\tfrac{y^2}{2}}\right)\right].$$

Im Zentrum einer Kugelflächenquelle mit Radius R und Ergiebigkeit $\frac{Q_0}{2}(1+\cos\omega t)$ im Vollraum mit Senken gehorcht die Temperatur somit der Gleichung

$$\vartheta(t) = \frac{Q_0}{8\pi\lambda R}\left[e^{-R\sqrt{\alpha_c}} \cdot e^{-R\sqrt{\sqrt{a^4\alpha_c^2+\omega^2}+a^4}+\frac{\alpha_c}{2}}\right.$$

$$\left. \cdot \cos\left(\omega t - R\sqrt{\sqrt{a^4\alpha_c^2+\omega^2}-4a^4}-\frac{\alpha_c}{2}\right)\right].$$

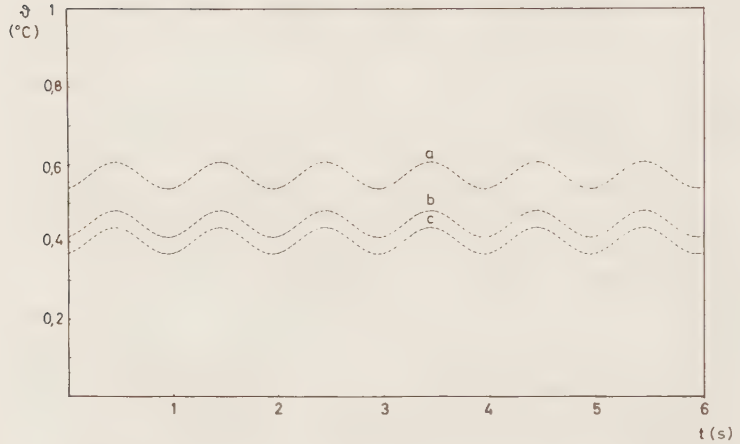


Abb. 11. Eingeschwungener Temperaturverlauf im Zentrum einer Kugelflächenquelle (R).
$\alpha_c = 0$ (a), 24,5 (b), 49 (c) (cm^{-2}); $\omega = 2\pi\,s^{-1}$.

II. 3. Das Senkenfeld im Vollraum mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente

Während die bisher betrachteten Senkenfelder eine konstante Ergiebigkeit hatten, d.h. dem System fortlaufend eine zeit-

konstante Wärme entzogen, soll die Senkenergiebigkeit im folgenden Kapitel, ähnlich wie es bereits bei den Quellen eingeführt wurde, in Form einer harmonischen Schwingung schwanken. Als charakteristische Größe für die Senkenergiebigkeit ist bereits

$$\alpha = \beta_K \cdot v_K = \frac{N_K \cdot S_B \cdot c_B \quad F_K \cdot v_K}{\lambda_G}$$

eingeführt worden. Für das Senkenfeld mit harmonischer Ergiebigkeitskomponente kann man die zeitveränderliche Ergiebigkeit $\alpha(t)$ definieren,

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t ,$$

wobei α_1 für die Amplitude der harmonischen Ergiebigkeitskomponente steht.

Diese Größe kann physiologisch als eine Änderung der Geschwindigkeit des Kapillarblutes v_K interpretiert werden. Änderungen von v_K kommen durch Querschnittsänderungen der den Kapillaren vorgeschalteten Arteriolen zustande. Bei extrem weitgestellten Arteriolen können auch die Schwankungen des Blutdruckes Ursache für kapillare Wechselströmungen sein (Kapillarpuls). Harmonische Änderungen der Anzahl der Kapillaren pro Volumeneinheit N_K und der Querschnittsfläche der Kapillaren F_K sind als Ursache für Schwankungen von v_K und somit für die Existenz von α_1 auszuschließen.

Da v_K nur zwischen Null und einem Maximalwert schwanken kann, muß gelten:

$$\alpha_1 \leqq \alpha_0$$

Eine Relation $\alpha_1 > \alpha_0$ würde bedeuten, daß zeitweise anstelle eines Senkenfeldes ein Quellenfeld existieren würde. Das ist aber wegen der physiologischen Konzeption des Senkenfeldes unstimmig. Es wird ja angenommen, daß relativ kühles Blut in ein Zylinderrohr (Kapillare) einfließt, dessen Wand eine höhere Temperatur besitzt, so daß eine Wärmeübertragung Gewebe - Blut stattfinden kann.

Die Differentialgleichung für den Wärmetransport im Vollraum lautet unter Berücksichtigung der harmonischen Ergiebigkeitskomponente der Senken

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t) \cdot \vartheta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} .$$

II. 3.1. Punktquelle mit Wärmeimpuls

Eine Punktquelle soll einen Wärmeimpuls $Q' = Q \cdot dt$ abgeben.

Um zu einer Lösung $\vartheta(r,t)$ zu kommen, wird die Differentialgleichung mit dem Ansatz

$$\vartheta(r,t) = v(r,t) \cdot e^{-a^2 \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\sin \omega t}{\omega})} \qquad (v = \text{Rechengröße})$$

umgeformt, so daß sich

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

ergibt.

Für diese Differentialgleichung ist die Lösung bekannt, wenn ein Wärmeimpuls Q' die Punktquelle in r = 0 zur Zeit t = 0 verläßt,

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q'}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.$$

Für $\vartheta(r,t)$ im zeitveränderlichen Senkenfeld gilt demnach

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q'}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}.$$

II. 3.2. Kugelflächenquelle mit Wärmeimpuls

Auf der Kugelflächenquelle mit dem Radius R existiert eine homogene Verteilung von Punktquellen. Der Wärmeimpuls zum Zeitpunkt t = 0 ist

$$Q' = \int_F q'(F)\,dF = 4\pi R^2 \cdot q' \qquad (q' = \text{const.})$$

Der Aufpunkt befindet sich wieder im Zentrum der Quelle, so daß der Abstand aller Punktquellen vom Aufpunkt R ist.

Daher ergibt sich für $\vartheta(t)$ folgende Gleichung

$$\vartheta(t) = \int_F \frac{q'}{\varrho \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2t}} \cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)} dF.$$

Mit q' = const. liefert die Integration den schon bekannten

Ausdruck für den Temperaturverlauf im Zentrum:

$$\vartheta(t) = \frac{Q'}{g \cdot c} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}^3} \cdot \cdot \cdot e^{-\frac{R^2}{4a^2 t}} \cdot$$

$$\cdot e^{-a^2\left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{\sin \omega t}{\omega}\right)} .$$

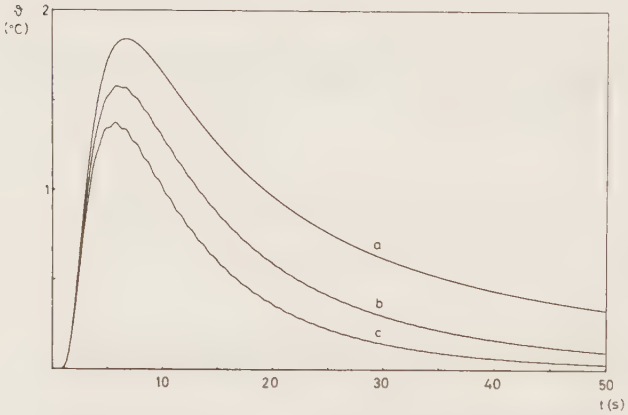


Abb 12 A. Temperaturverlauf im Zentrum einer Kugelflächenquelle (R) nach Freiwerden eines Wärmeimpulses Q' in t = 0 bei Senken im Vollraum
Ergiebigkeitskoeffizient: $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t$ $\omega = 2\pi\ s^{-1}$

$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ (a)

$\alpha_0 = \alpha_1 = 24{,}5$ (b)

$\alpha_0 = \alpha_1 = 49$ (c)

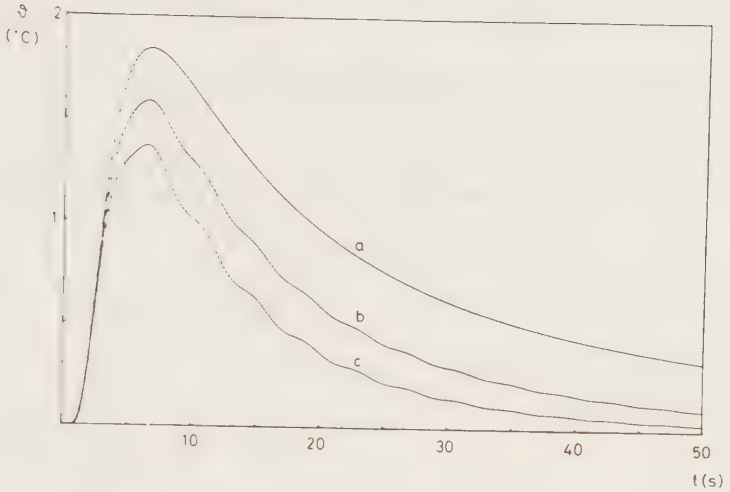


Abb 12 B. $\omega=0{,}5\pi\ s^{-1}$

II. 4. Stationäre Temperaturfelder einfacher konzentrischer Anordnung von Quellen und Senken

Bisher wurden Senken besprochen, die sich mittels einer Verschmierungsoperation über den gesamten Vollraum verteilen ließen. Nun sollen homogene Senkenverteilungen mit geometrischer Begrenzung betrachtet werden. Von Interesse sind Punkt- und Kugelflächensenke. Si sollen jeweils in Beziehung zu Punkt- oder Kugelflächenquellen gebracht werden, wobei konzentrische Anordnungen von Quellen und Senken gewählt werden, so daß in allen Fällen eine radialsymme-

trische Temperaturverteilung gegeben ist. Im folgenden werden die stationären Temperaturfelder angegeben.

II. 4.1. Punktquelle und Kugelflächensenke

Eine Punktquelle mit konstanter Wärmeleistung Q befindet sich im Zentrum einer Kugelflächensenke mit dem Radius R_2.

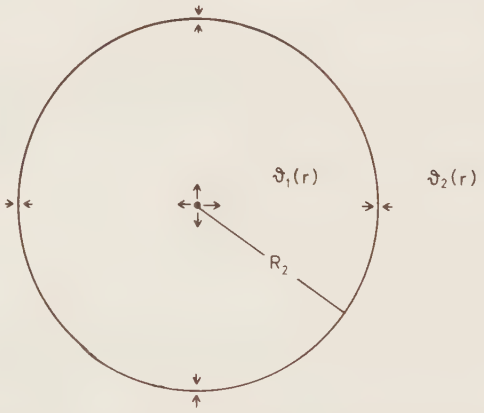


Abb. 13. Punktquelle im Zentrum einer Kugelflächensenke

Für die beiden Räume

Raum 1 : $0 < r < R_2$ innerhalb der Kugel

und

Raum 2 : $R_2 < r < \infty$ außerhalb der Kugel

ist die gleiche Differentialgleichung zu lösen,

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\vartheta}{dr} = 0.$$

Die Lösungen in den beiden Räumen sind von der Form

$$\vartheta_{1,2}(r) = A_{1,2} + \frac{B_{1,2}}{r}$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf Raum 1 bzw. 2 beziehen. Da nur die stationären Temperaturfelder interessieren, fehlt eine t-Abhängigkeit.

Es sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

1. $\vartheta_1(R_2) = \vartheta_2(R_2)$.

2. $$-\lambda \left(\frac{d\vartheta_1}{dr}\right)_{r=R_2} = \frac{Q}{4\pi R_2^2},$$

d.h. die auf der Kugelfläche pro Flächeneinheit eintreffende Wärmeleistung ist die Ergiebigkeit Q der Quelle geteilt durch die Kugelfläche

3. $$-\lambda \left(\frac{d\vartheta_1}{dr}\right)_{r=R_2} + \lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_2} = \lambda \cdot \alpha_0 \cdot d \cdot \vartheta_2(R_2).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die auf der Kugelfläche in der Zeiteinheit eintreffende Wärme um den Wärmebetrag reduziert wird, der auf der Kugelfläche verschwindet, so daß nach außen der Betrag

$$-4\pi R_2^2 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_2}$$

abfließt. Die Senkenwärme, d.h. die auf der Kugelfläche verschwindende Wärme, ergibt sich in folgender Weise:

In $r = R_2$ stelle man sich eine dünne Kugelschale der Dicke d vor. Das Schalenvolumen

$$V_S = 4\pi R_2^2 \cdot d \qquad \text{(Näherung für kleinen Wert von d)}$$

sei homogen mit isotropen Punktsenken erfüllt. Da die im Volumenelement pro Zeiteinheit verschwindende Wärme

$$(\lambda \cdot \alpha_0 \cdot \vartheta)\, dV$$

ist, folgt für die gesamte Senkenwärme

$$Q_S = \lambda \cdot \alpha_0 \cdot d \cdot \vartheta_2(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 .$$

Die Flächendichte der Senkenergiebigkeit ist somit

$$q_S = \lambda \cdot \alpha_0 \cdot d \cdot \vartheta_2(R_2) = \frac{\lambda \cdot \alpha_0 \cdot d \cdot B_2}{R_2} ,$$

da $\vartheta_2(R_2) = \frac{B_2}{R_2}$ ist. $A_2 = 0$ folgt aus 4. Randbedingung. Es sei darauf hingewiesen, daß die Ergiebigkeit der Kugelflächensenke temperaturabhängig ist.

4. Für $r = \infty$ muß $\vartheta_2 = 0$ sein, d.h.

In unendlich großer Entfernung von der Quelle wird keine Temperaturerhöhung mehr zu beobachten sein.

Unter Berücksichtigung der vier genannten Randbedingungen ergeben sich für die Differentialgleichung die Lösungen für die beiden Räume:

$$\vartheta_1(r) = \frac{Q}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha_o d}{1+\alpha_o d R_2}\right),$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1+\alpha_o d R_2} \cdot \frac{1}{R_2}.$$

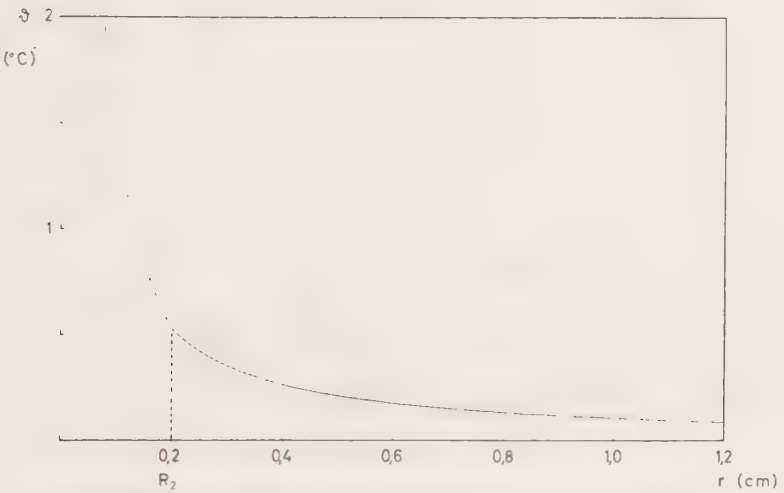


Abb.14 Stationäres Temperaturfeld, hervorgerufen durch eine Punktquelle im Zentrum einer Kugelflächensenke mit Radius R_2. $Q=2{,}39\cdot10^{-3}\,cal\cdot s^{-1}$, $\lambda=10^{-3}\,cal\cdot cm^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}$, $\alpha_o d=4\,cm^{-1}$, $R_2=0{,}2\,cm$.

II. 4.2. Punktsenke und Kugelflächenquelle

Im Zentrum einer Kugelflächenquelle mit dem Radius R_1

befindet sich eine Punktsenke (Abb. 15).

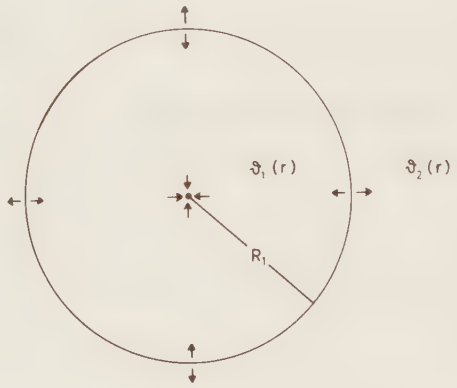


Abb. 15. Punktsenke im Zentrum einer Kugelflächenquelle

Da die Senkenergiebigkeit dem Volumen des Senkenraumes proportional ist, versagt hier die Darstellung

$$Q_S = (\lambda \cdot \alpha_o \cdot \vartheta) \cdot V$$

da mit differentiell kleinem Volumen V bei Endlichkeit der anderen Größen Q_s verschwindend klein ist. Weil aber eine wirksame Senkenaktivität vorhanden sein soll, wird für Q_s ein entsprechender konstanter Betrag vorgegeben, Q_s = const.

Wieder ist für die beiden Räume

Raum 1 : $0 < r < R_1$

Raum 2 : $R_1 < r < \infty$

die für beide Räume gleiche und stationäre Differentialgleichung zu lösen

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\vartheta}{dr} = 0,$$

wobei die Lösungen die Form

$$\vartheta_{1,2} = A_{1,2} + \frac{B_{1,2}}{r}$$

haben.

Für die Lösung sind wieder Randbedingungen zu beachten.

$r = R_1$: $\vartheta_1(R_1) = \vartheta_2(R_1)$.

$r = R_1$: $\lambda \left(\frac{d\vartheta_1}{dr}\right)_{r=R_1} = \frac{Q_S}{4\pi R_1^2}$,

d.h. die von der Kugelflächenquelle zentripetal emittierte Wärme muß gleich der Senkenwärme sein.

$$r = R_1 : -\lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_1} = \frac{Q - Q_S}{4\pi R_1^2},$$

d.h. die die Quelle zentrifugal verlassende Wärme ist die Quellenergiebigkeit, reduziert um die Senkenwärme, die nach innen geht.

$r = \infty$: $\vartheta_2 = 0$.

Nach einfacher Rechnung ergeben sich folgende Lösungen

$$\vartheta_1(r) = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q_S}{r}\right),$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{Q - Q_s}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{r} .$$

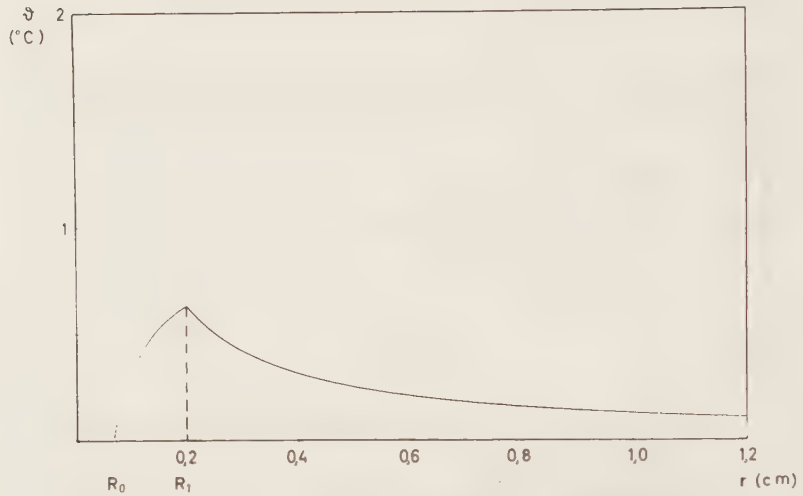


Abb.16 Temperaturfeld bei stationärer Wirkung einer Kugelflächenquelle (R_1) und einer Punktsenke im Zentrum. $Q = 2{,}39 \cdot 10^{-3}\,cal \cdot s^{-1}$, $Q_s = 0{,}797 \cdot 10^{-3}\,cal \cdot s^{-1}$, $\lambda = 10^{-3}\,cal \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$, $R_1 = 0{,}2$ cm.

Bei einem Wert

$$R_0 = \frac{Q_s}{Q} \cdot R_1$$

wird $\vartheta_1 = 0$; für Werte $r < R_0$ ist daher eine Abkühlung gegenüber der Basistemperatur zu erwarten.

Mit den Werten $Q_s = C$ und $R_1 = C_1 r = C$, also für die Temperatur in einer Punktquelle, erhält man folgerichtig aus obigen Lösungen

$$\vartheta_1(C) = \vartheta_2(C) = \infty .$$

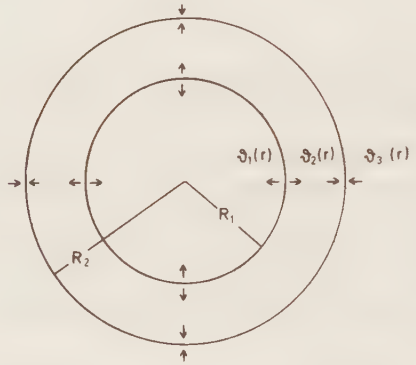
Analog findet man für $Q = 0$ und $r = 0$, also für die Temperatur in einer Punktsenke

$$\vartheta_4(0) = \vartheta_1(0) = -\infty .$$

Diese beiden Werte ergeben sich mathematisch regelrecht, sind aber physikalisch nicht real, da eine unendlich hohe Temperatur nicht erreicht werden kann und eine unendlich niedrige Temperatur, da der absolute Nullpunkt einen endlichen Wert besitzt, sicher nicht existiert. Die beiden "unsinnigen" Temperaturen beruhen auf der mathematisch zulässigen Idealisierung einer Punktquelle und einer Punktsenke.

II. 4.3. Quellen und Senken von Flächengestalt

Schließlich soll noch eine konzentrische Anordnung einer Kugelflächenquelle mit dem Radius R_1 und einer Kugelflächensenke mit dem Radius R_2 betrachtet werden. Zunächst soll R_1 R_2 sein.



Die Pfeile an Quellen (←|→) und Senken (→|←) geben nicht immer die Richtung des Wärmeflusses an!

Abb. 17. Kugelflächenquelle konzentrisch im Innern einer Kugelflächensenke.

Drei Räume sind zu unterscheiden (Abb. 17).

Raum 1 : $0 < r < R_1$ mit $\vartheta_1(r)$
Raum 2 : $R_1 < r < R_2$ mit $\vartheta_2(r)$
Raum 3 : $R_2 < r < \infty$ mit $\vartheta_3(r)$.

In allen Räumen ist wieder die stationäre Differentialgleichung zu lösen

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} = 0.$$

Die Lösungen

$$\vartheta_{1,2,3} = A_{1,2,3} + \frac{B_{1,2,3}}{r}$$

ergeben sich durch Erfüllung folgender Randbedingungen.

$r = 0$: $\vartheta_1(0)$ hat einen endlichen Wert,
da eine grenzenlose Wärmespeicherung im quellenlosen Raum 1 nicht möglich ist.

$r = R_1$: $\vartheta_1(R_1) = \vartheta_2(R_1)$.

$r = R_1$: $-\lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$,

d.h. die gesamte stationäre Wärmemenge, die die Quelle von der Fläche $4\pi R_1^2$ pro Zeiteinheit abgibt, fließt nur nach außen in den Raum 2 ein. Dies geht aus Randbedingung 1 hervor, denn würde Wärme auch im Raum 1 einfließen, müßte die Temperatur dort bei Abwesenheit von Quellen und Senken grenzenlos anwachsen.

$r = R_2$: $\vartheta_2(R_2) = \vartheta_3(R_2)$.

$r = R_2$: $-\lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_2} + \lambda \left(\frac{d\vartheta_3}{dr}\right)_{r=R_2} = \lambda \cdot \alpha_c \cdot d \cdot \vartheta_2(R_2)$.

$r = \infty$: $\vartheta_3 = 0$.

Als Lösungen gewinnt man bei Berücksichtigung der Randbedingungen nach einfacher Rechnung

$$\vartheta_1(r) = \frac{Q}{4\pi\lambda R_1} \cdot \frac{1 + \alpha_0 d(R_1 - R_2)}{1 + \alpha_0 d R_2},$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha_0 \cdot d}{1 + \alpha_0 d R_2}\right),$$

$$\vartheta_3(r) = \frac{Q}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_0 d R_2} \cdot \frac{1}{r}$$

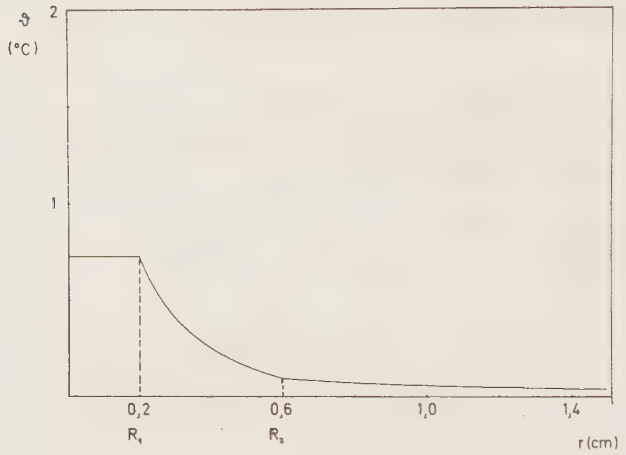


Abb. 18. Stationäres Temperaturfeld einer konzentrischen Anordnung einer Kugelflächenquelle (R_1), die im Inneren einer Kugelflächensenke (R_2) liegt. $Q = 2{,}39 \cdot 10^{-3}$ cal $\cdot s^{-1}$, $\lambda = 10^{-3}$ cal $\cdot cm^{-1} s^{-1} K^{-1}$, $\alpha_0 d = 4 cm^{-1}$, $R_1 = 0{,}2$cm, $R_2 = 0{,}6$cm

Für den Fall, daß die Kugelflächensenke konzentrisch im Innern der Kugelflächenquelle liegt, also $R_2 < R_1$ ist, ergeben sich die Lösungen aus einer analogen Rechnung.

Raum 1 : $0 < r < R_2$ mit $\vartheta_1(r)$,
Raum 2 : $R_2 < r < R_1$ mit $\vartheta_2(r)$,
Raum 3 : $R_1 < r < \infty$ mit $\vartheta_3(r)$.

Für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} = 0$$

müssen wieder Lösungen der Form

$$\vartheta_{1,2,3} = A_{1,2,3} + \frac{B_{1,2,3}}{r}$$

unter Beachtung der Randbedingungen gefunden werden.

$r = 0$: ϑ_1 = endlich.

$r = R_2$: $\vartheta_1(R_2) = \vartheta_2(R_2)$.

$$\lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_2} = \lambda \cdot \alpha_0 \cdot d \cdot \vartheta_1(R_2).$$

$r = R_1$: $\vartheta_2(R_1) = \vartheta_3(R_1)$.

$$-\lambda \left(\frac{d\vartheta_3}{dr}\right)_{r=R_1} + \lambda \left(\frac{d\vartheta_2}{dr}\right)_{r=R_1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2},$$

d.h. die Summe der nach außen und nach innen von der Kugelflächenquelle pro Flächen- und Zeiteinheit abgegebenen Wärme ist die Flächendichte der Quellenergiebigkeit.

$r = \infty$: $\vartheta_3 = 0$.

Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$\vartheta_1 = \frac{Q}{4\pi\lambda R_1} \cdot \frac{1}{1 + \alpha_0 d R_2},$$

$$\vartheta_2 = \frac{Q}{4\pi\lambda R_1} \cdot \left[1 - \frac{\alpha_0 \cdot d \cdot R_2^2}{1 + \alpha_0 d R_2} \cdot \frac{1}{r}\right],$$

$$\vartheta_3 = \frac{Q}{4\pi\lambda r} \cdot \left[1 - \frac{\alpha_0 \cdot d \cdot R_2^2}{1 + \alpha_0 d R_2} \cdot \frac{1}{R_1}\right].$$

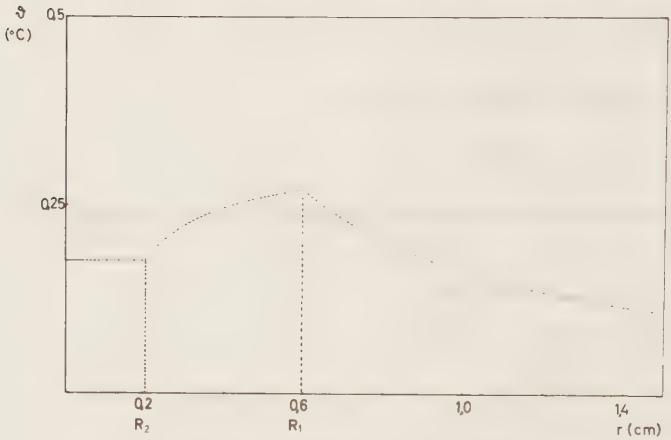


Abb. 19. Stationäres Temperaturfeld einer Kugelflächenquelle (R_1) und einer konzentrisch in ihrem Innern liegenden Kugelflächensenke (R_2)

$Q = 2{,}39 \cdot 10^{-3}$ cal · s^{-1}, $\lambda = 10^{-3}$ cal · $cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$,

$\alpha \cdot d = 4\,cm^{-1}$, $R_1 = 0{,}6$ cm, $R_2 = 0{,}2$ cm

Es ist ersichtlich, daß bei $R_1 = R_2$, d.h. Quellen und Senken fallen zusammen, die beiden Lösungsgruppen ineinander übergehen.

Schließlich sie noch die Lösung angegeben für den Fall, daß die Kugelflächensenke, deren Radius R_2 größer als der der Kugelflächenquelle R_1 ist, eine konstante Senkenergiebigkeit Q_s besitzt.

$$\vartheta_1 = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q_s}{R_2} \right)$$

$$\vartheta_2(r) = \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \left(\frac{Q}{r} - \frac{Q_s}{R_2} \right),$$

$$\vartheta_3(r) = \frac{Q - G_S}{4\pi\lambda} \cdot \frac{1}{r}$$

II. 5. Quellen und Senken von Kugelflächengestalt mit harmonischen Ergiebigkeitskomponenten

Es soll nun eine konzentrische Anordnung einer Kugelflächenquelle mit Radius R_1 und einer Kugelflächensenke mit Radius R_2 betrachtet werden, wobei $R_1 < R_2$ sein soll. Quellen und Senken sollen homogen auf den Kugelflächen verteilt sein.

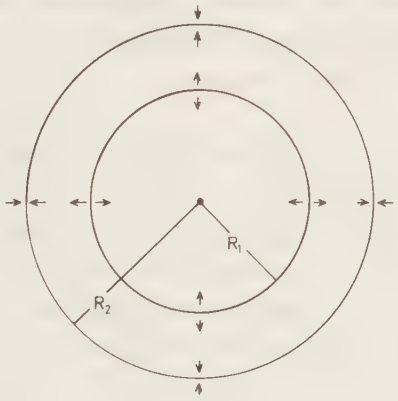


Abb. 20. Kugelflächenquelle (R_1) im Inneren einer Kugelflächensenke (R_2).

Die Temperaturfelder bei dieser Quellen- und Senkengeometrie sind die theoretische Grundlage einesspäter zu besprechenden Experimentes. Die Geometriestruktur des Experimentes wird allerdings nur in grober Näherung auf die hier angegebene zurückgeführt werden können. Dies gilt weniger für die Quelle, die, wie bereits besprochen, als eine relativ kurze zylindrische Heizspirale mit zentralem Temperaturfühler ausgebildet ist. Das Senkenfeld im Experiment wird durch einen die Wärmequelle tangierenden mit Wasser durchflossenen Schlauch erzeugt. Dieser pulsierende Wasserfluß soll die physiologische Durchströmung einer Arterie nachahmen. Von einer Senkenwirkung, die der einer konzentrischen Kugelflächensenke gleicht, kann hierbei natürlich nicht die Rede sein. Das wird hingenommen, da eine nur qualitative Darstellung des Quellen-Senken-Systems bei gegenseitigen Frequenz- und Phasenverschiebungen zwischen den harmonischen Ergiebigkeiten Ziel der Untersuchungen sein soll.

II. 5.1. Temperaturunabhängige Senkenergiebigkeit

In der oben beschriebenen Quelle - Senken - Anordnung soll die Senke zunächst eine temperaturunabhängige Ergiebigkeit besitzen. Der gemeinsame Aufpunkt von Quelle und Senke liegt wieder im Mittelpunkt der konzentrischen Anordnung r = 0.

Die Quellenergiebigkeit ist

$$Q_1(t) = \frac{Q_{10}}{2}\left(1 + \cos(\omega_1 t + \gamma)\right)$$

mit der Frequenz

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$$

und der Amplitude $\frac{1}{2} Q_{10}$.

Die Größe γ drückt eine Phasenverschiebung der Quellenergiebigkeitskomponente aus, die als variabel und im Experiment als einstellbar vorausgesetzt wird.

Die temperaturunabhängige Ergiebigkeit der Senke ist

$$Q_2(t) = -\frac{Q_{20}}{2}(1 + \cos \omega_2 t)$$

mit der Frequenz $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$

und der Amplitude $\frac{1}{2} Q_{20}$.

Da der Aufpunkt im Zentrum r = 0 liegt, ergibt sich die Temperaturerhöhung $\vartheta(t)$ im Aufpunkt durch räumliche und zeitliche Integration der Fundamentallösungen der Punktquellen im Abstand R_1 und der Punktsenken im Abstand R_2 vom Zentrum

$$\vartheta(t) = \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1}\left(1 + e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right)$$

$$- \frac{Q_{20}}{8\pi\lambda R_2}\left(1 + e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right)\right)$$

$$= \vartheta(t; \omega_1, \gamma).$$

Im folgenden soll die Abhängigkeit der Übertemperatur ϑ von ω_1 und γ, d.h. von der Frequenz und der Phasenlage der Wechselheizung, untersucht werden. Man kann schreiben

$$\vartheta(t; \omega_1, \gamma) = \frac{1}{8\pi\lambda} \cdot \left(\frac{Q_{10}}{R_1} - \frac{Q_{20}}{R_2}\right) + \frac{1}{8\pi\lambda} \cdot f(t; \omega_1, \gamma),$$

wobei f für die folgende Funktion steht

$$f(t;\omega_1,\gamma) = \frac{Q_{10}}{R_1} \cdot e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}\right)$$
$$- \frac{Q_{20}}{R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2^2}{2\alpha^2}}} \cdot \cos\left(\omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2^2}{2\alpha^2}}\right).$$

Folgende Umrechnung ist angebracht,

$$f = A \cdot \cos\alpha - B \cdot \cos\beta$$

mit

$$A = \frac{Q_{10}}{R_1} \cdot e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}}, \quad B = \frac{Q_{20}}{R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2^2}{2\alpha^2}}},$$

$$\alpha = \omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1^2}{2\alpha^2}}, \quad \beta = \omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2^2}{2\alpha^2}}.$$

Weiter gilt

$$f = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\epsilon \cdot \cos\alpha - \sin\epsilon \cdot \cos\beta)$$

mit

$$\cos\epsilon = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{und} \quad \sin\epsilon = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Weitere Umrechnungen führen zu dem Ausdruck

$$f = \sqrt{A^2+B^2}\left\{(\cos\epsilon - \sin\epsilon)\cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right.$$
$$\left. - (\cos\epsilon + \sin\epsilon)\cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right\} =$$

$$= \sqrt{(A^2+B^2)(1-\sin\epsilon\cdot\cos(\alpha-\beta))}\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta\right)$$

mit

$$\delta = \arccos\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot(\cos\epsilon-\sin\epsilon)}{\sqrt{1-\sin 2\epsilon\cdot\cos(\alpha-\beta)}}.$$

Wegen der Beziehung

$$\sin 2\epsilon = \frac{2AB}{A^2 + B^2}$$

ist auch

$$f = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cdot \cos(\alpha - \beta)} \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \delta\right)$$

und

$$\delta = \arccos \frac{(A - B) \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cdot \cos(\alpha - \beta)}} .$$

Einsetzen der Werte A, B, α und β führt zu

$$f(t;\omega_1,\gamma) = \sqrt{\left(\frac{Q_{10}}{R_1}\right)^2 \cdot e^{-2R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} + \left(\frac{Q_{20}}{R_2}\right)^2 \cdot e^{-2R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} - \frac{2\,Q_{10}Q_{20}}{R_1 R_2} \cdot e^{-\left(R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} + R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right)}}$$

$$\cdot \cos\left[(\omega_1 - \omega_2)t + \gamma - \left(R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} - R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right)\right] \cdot \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t - \frac{1}{2}\left(R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} + R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right) + \frac{1}{2}\gamma + \delta\right].$$

Die größte Zeitabhängigkeit in der Funktion f wird durch die Größe

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t$$

im Cosinusglied außerhalb der Wurzel dargestellt.

Daneben gibt es eine Zeitabhängigkeit im Amplitudenfaktor von der Form

$$\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + X] .$$

Diese zeitliche Veränderung der Amplitude erscheint als eine Schwebung

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2 .$$

Aber auch die Phasengröße δ weist eine Zeitabhängigkeit auf, die als eine Phasenmodulation interpretiert werden kann.

Welche Werte von ω_1 und γ führen zu einem Minimumwert des Amplitudenfaktors der Übertemperatur $\vartheta(t;\omega_1,\gamma)$? Da die Funktion $f(t;\omega_1,\gamma)$ als allein von ω_1 und γ abhängig in der ϑ -Darstellung erscheint, gilt die gleiche Frage auch für f.

Ein absolutes Minimum des Amplitudenfaktors ist gegeben, wenn der Betrag des zeitabhängigen und negativen Gliedes unter der Wurzel am größten ist. Das ist der Fall, wenn

$$\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t-\left(R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}-R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right)+\gamma\right]=1.$$

Für alle t-Werte ist das zutreffend, wenn

$$\omega_1=\omega_2 \quad \text{und} \quad \gamma=-\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\,(R_2-R_1).$$

Unter diesen Bedingungen ist die Schwebung verschwunden, die Ergiebigkeiten von Quelle und Senke schwingen mit gleicher Frequenz. Die Phase der Quellenergiebigkeit wird durch die Zeitverschiebung

$$(R_2-R_1)\cdot(2a^2\omega_2)^{-\frac{1}{2}}$$

mit der der Senke in Gleichlauf gebracht.

Um den endgültigen ϑ -Ausdruck zu formulieren, ist die Änderung der Phasengröße δ zu bestimmen, wenn ω_1 und γ in der angegebenen Weise eingestellt werden.

Für die eingestellten ω_i - und γ -Werte folgt

$$\alpha - \beta = 0$$

und damit

$$\delta = \arccos 1 = 0.$$

Die auf Minimalamplitude (Resonanz) eingestellte Temperaturschwingung ist somit

$$\vartheta(t) = \frac{1}{8\pi\lambda} \cdot \left[\frac{Q_{10}}{R_1} \left(1 + e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}} \right) - \frac{Q_{20}}{R_2} \left(1 + e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}} \right) \right] \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}} \right).$$

Diese Endformel für die Resonanztemperatur folgt aus der ϑ-Ausgangsformel, in der die integrale Wirkung der Quellen und Senken im Zentrum $r = 0$ zum Ausdruck kam, indem $\omega_1 = \omega_2$ und für γ der Wert eingesetzt wird, der das zeitunabhängige Phasenglied in beiden Argumenten gleich werden läßt. Es ist also so, daß die Einstellung der beiden ϑ Lösungen von Quelle und Senke in $r = 0$ auf Synchronizität und die Einstellung der Superposition auf Amplitudenminimum zum gleichen Ergebnis führt.

II. 5.2. Temperaturabhängige Senkenergiebigkeit. Allgemeiner Fall

Eine Kugelflächenquelle vom Radius R_1 wird wieder von einer konzentrischen Kugelflächensenke vom Radius R_2 eingeschlossen. Die Ergiebigkeiten sind

$$q_1(t) = \frac{Q}{8\pi R_1^2}\,(1 + \cos\omega_1 t + \chi)\,;$$

$$q_2(t) = -\lambda\,\alpha_0\,d\,(1 + \beta\cdot\cos\omega t)\cdot\vartheta(R_2,t)$$

$$[q_{1,2}] = cal\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}.$$

q_2 ist in der folgenden Weise definiert. Eine dünne Kugelschicht vom inneren Radius R_2 und der Dicke d sei ein Geweberaum. Kapillaren der homogenen Dichteverteilung N_K und dem Querschnitt F_K werden von Blut mit der mittleren Geschwindigkeit v_K durchflossen. Wenn ϑ die Gewebeübertemperatur gegenüber der des in die Kapillaren einfließenden Blutes ist, so ist die auf die Raumeinheit bezogene Senkenergiebigkeit

$$q_S(t) = -\lambda\cdot\alpha(t)\cdot\vartheta$$

mit

$$\alpha(t) = \frac{N_K\cdot\varrho_B\cdot c_B\cdot F_K}{\lambda}\cdot v_K(t)$$

und λ als Wärmeleitzahl des Gewebes.

Wegen $Q_S = 4\pi R_2^2\,d\cdot q_S$

und $q_2 = \frac{Q_S}{4\pi R_2^2}$

folgt $q_2(t) = -\lambda\cdot d\cdot\alpha(t)\cdot\vartheta$.

Wenn man neben einem Gleichfluß eine harmonische Komponente im Kapillarfluß annimmt, so wird

$$q_2 = -\lambda \alpha_2 \, d \, (1 + \beta \cdot \cos \omega_2 t) \cdot \vartheta(R_2, t)$$

mit $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega t$

und $\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$.

Diese Darstellung des Senkenmechanismus in einer dünnen, mit Kapillaren durchbluteten Kugelschicht soll keineswegs bedeuten, daß bei der praktischen Anwendung die Senkenwirkung als die von Kapillaren zu verstehen ist. Es kann vielmehr erwartet werden, daß zumindest für den Sekundenrhythmus dieser praktische Bezug nicht gegeben ist, wenn nicht ein starker Kapillarpuls im Spiele ist.

Die allgemeine Situation in der Praxis wird die sein, daß ein relativ starkes Gefäß mit pulsierender Strömung sich in der Nachbarschaft einer kleinen, pulsierenden Wärmequelle befindet. Diese Situation wird auch im Experiment weitgehend nachgeahmt.

In einem Aufpunkt mit den sphärischen Koordinaten

$$r = r_1 \quad \varphi = \varphi \quad \text{und} \quad \theta = \theta$$

erhält man durch räumliche und zeitliche Superposition aller "Punktquellen" und "Punktsenken" die folgende Temperaturdarstellung

$$\vartheta(r, \varphi, \theta, t) = \frac{Q}{8\pi R_1^2} \cdot \frac{1}{\varrho c \sqrt{4\pi a}^3} \cdot \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\tau=0}^{t} \frac{1 + \cos(\omega_1 \tau + \gamma)}{\sqrt{t - \tau}^3} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{Q^2}{4\pi a^2 (t-\tau) R_1^2}} R^2 \sin\vartheta' \, d\varphi' \, d\vartheta' \, d\tau - \lambda \alpha_0 \, d \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \int_{\tau=0}^{t} \frac{(1 + \beta \cos(\omega_2 \tau)) \cdot \vartheta(R_2, \tau)}{\sqrt{t - \tau}^3} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{\varrho_1^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot R_2^2 \sin\theta' d\varphi' d\theta' d\tau.$$

ϱ_1 und ϱ_2 sind die Abstände des Aufpunktes vom Koordinatennullpunkt,

$$\varrho_1^2 = r^2 + R_1^2 - 2R_1 r\cos\theta',$$

$$\varrho_2^2 = r^2 + R_2^2 - 2R_2 r\cos\theta'.$$

θ' ist der laufende Wert des Polwinkels in beiden Integralen. Der Polwinkel θ des Aufpunktes wird null gesetzt. Mit den Substitutionen in beiden Integralen

$$X^2 = \frac{\varrho_1^2}{4a^2(t-\tau)} \quad \text{bzw.} \quad X^2 = \frac{\varrho_2^2}{4a^2(t-\tau)}$$

erhält man

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q}{8\lambda\sqrt{\pi^3}} \cdot \int_0^{\frac{\varrho_1}{2a\sqrt{t}}} \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{\varrho_1}\left(1+\cos\left(\omega_1 t + \gamma - \frac{\omega_1\varrho_1^2}{4a^2X^2}\right)\right) \cdot e^{-X^2} \sin\theta' d\theta' dX -$$

$$- \frac{\alpha_0 d R_2^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\varrho_2}{2a\sqrt{t}}} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\varrho_2}\left(1+\beta\cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2\varrho_2^2}{4a^2X^2}\right)\vartheta\left(R_2, t - \frac{\varrho_2^2}{4a^2X^2}\right)\right) \cdot e^{-X^2} \sin\theta' d\theta' dX.$$

Es wird nun im weiteren der eingeschwungene Zustand vorausgesetzt,

$$\frac{\varrho_{1,2}}{2a\sqrt{t}} = 0$$

Außerdem wird in beiden Integralen ϑ_1 und ϑ_2,

$$\vartheta(r,t) = \vartheta_1 - \vartheta_2$$

$\varrho_1 = Z$ und $\varrho_2 = Z$ gesetzt.

Wegen

$$\frac{\sin\theta' d\theta'}{\varrho_{1,2}} = \frac{dz}{r \cdot R_{1,2}}$$

folgt dann

$$\vartheta(r,t) = \frac{Q}{8\lambda\sqrt{\pi}^3 r R_1} \int_{|R_1-r|}^{R_1+r} \int_0^{\infty} \left(1+\cos\left(\omega_1 t+\gamma-\frac{\omega_1 z^2}{4a^2X^2}\right)\right)\cdot e^{-X^2} dX dz$$

$$-\frac{\alpha_0 dR_2}{\sqrt{\pi}^3 r} \int_{|R_2-r|}^{R_2+r} \int_0^{\infty} \left(1+\beta\cos\left(\omega_2 t-\frac{\omega_2 z^2}{4a^2X^2}\right)\right)\cdot\vartheta\left(R_2, t-\frac{z^2}{4a^2X^2}\right)\cdot e^{-X^2} dX dz.$$

Wegen

$$\int e^{-az}\sin az\, dz = -\frac{e^{-az}}{2a}(\sin az+\cos az)$$

und

$$\int e^{-az}\cos az\, dz = \frac{e^{-az}}{2a}(\sin az-\cos az)$$

folgt weiter

$$\vartheta_1 = \frac{Q}{32\pi\lambda r R_1}\left\{2(R_1+r)-2|R_1-r|\right.$$

$$-\frac{e^{-(R_1+r)\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}\left(\cos\left(\omega_1 t+\gamma-(R_1+r)\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)+\sin\left(\omega_1 t+\gamma-(R_1+r)\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right)$$

$$\left.+\frac{e^{-|R_1-r|\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}}{\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}\left(\cos\left(\omega_1 t+\gamma-|R_1-r|\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)+\sin\left(\omega_1 t+\gamma-|R_1-r|\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right)\right\} = \vartheta_0(r,t).$$

ϑ_1 stellt die Lösung

$$\vartheta_1 = \vartheta_0(r,t)$$

dar, wenn keine Senken in $r = R_2$ vorhanden sind. Zur Probe findet man:

$$r=0:\ \vartheta_0(0,t) = \frac{Q}{8\pi\lambda R_1}\left(1+e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}\cdot\cos\left(\omega_1 t+\gamma-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right).$$

$$R_1 = \infty: \quad \vartheta_0(r,t) = \frac{Q}{8\pi\lambda r}\left(1 + e^{-r\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - r\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right).$$

$$\omega_1 = 0: \quad \vartheta_0(r,R_1) = \frac{Q}{8\pi\lambda r R_1}\left(R_1 + r - |R_1 - r|\right).$$

Die allgemeine Lösung erscheint als eine Integralgleichung

$$\vartheta(r,t) = \vartheta_0(r,t) -$$

$$- \frac{\alpha_0 dR_2}{\sqrt{\pi}\, r} \int_{|R_2-r|}^{R_2+r} \int_0^{\infty} \left(1+\beta\cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2 z^2}{4a^2X^2}\right)\right) \cdot \vartheta\left(R_2, t - \frac{z^2}{4a^2X^2}\right) \cdot e^{-X^2} dX dz.$$

Im Aufpunkt $r = 0$ gilt

$$\vartheta(0,t) = \frac{Q}{8\pi\lambda R_1}\left(1 + e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right)$$

$$- \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_0 dR_2}{\sqrt{\pi}\cdot r} \int_{|R_2-r|}^{R_2+r} \int_0^{\infty} \left(1+\beta\cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2 z^2}{4a^2X^2}\right)\right) \cdot \vartheta\left(R_2, t - \frac{z^2}{4a^2X^2}\right) \cdot e^{-X^2} dX dz.$$

Die allgemeine Lösung ϑ (r, t) kann durch ein fortlaufendes Näherungsverfahren bestimmt werden. Die 1. Näherung erhält man, indem für $\vartheta\left(R_2, t - \frac{z^2}{4a^2X^2}\right)$ in $\mathfrak{I}_2$ die senkenlose Lösung $\vartheta_0\left(R_2, t - \frac{z^2}{4a^2X^2}\right)$ gesetzt wird.

Diese Näherungslösung sei

$$\vartheta_1(r,t) = \vartheta_0(r,t) - \mathfrak{I}_2(r,t;\vartheta_0).$$

Die Lösung ϑ_1 wird dann in $\mathfrak{I}_2$ eingesetzt, um die 2. Näherungslösung zu erhalten u.s.w. Das Näherungsschema lautet somit

$$\vartheta_1(r,t) = \vartheta_0(r,t) - \mathfrak{I}_2(r,t;\vartheta_0)$$

$$\vartheta_2(r,t) = \vartheta_0(r,t) - \mathfrak{I}_2(r,t;\vartheta_1)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\vartheta_n(r,t) = \vartheta_0(r,t) - \mathfrak{J}_2(r,t;\vartheta_{n-1}).$$

Die explizite Darstellung der Näherungslösungen soll hier nicht weiter verfolgt werden.

II. 5.3. Näherungslösung

Im homogenen Vollraum befindet sich eine Kugelflächenquelle vom Radius $r = R_1$. Wenn die Ergiebigkeit der Quelle

$$q_1(t) = \frac{Q_{10}}{8\pi R_1^2}\left(1 + \cos(\omega_1 t + \gamma)\right)$$

ist, so wird, wenn keine weiteren Quellen und Senken im Vollraum existieren, die Zentraltemperatur in $r = 0$ sein

$$\vartheta(0,t) = \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1}\left(1 + e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right).$$

Eine zusätzliche Kugelflächensenke in $R_2 > R_1$ besitze die Ergiebigkeit

$$q_2(t) = -K(v_0 + v_1 \cos\omega_2 t)\cdot\vartheta(R_2,t).$$

Die radiale Symmetrie der instationären Temperaturfelder wird hierdurch nicht gestört.

v_0 ist die stationäre Geschwindigkeit eines wärmeabführenden Mediums im Konvektionsraum bzw. auf einer Konvektionsfläche in $r = R_2$. Sie wird von einer harmonischen Komponente der Kreisfrequenz ω_2 und der Amplitude v_1 überlagert. Da nur eine Senkenwirkung in $r = R_2$ stattfinden soll, muß $v_1 < v_0$ sein.

ϑ (R_2, t) ist die instationäre Temperatur am Senkenort. K stellt eine Konstante dar, durch welche die spezifische Wirkung des Konvektionsmechanismus beschrieben wird. Nimmt man an, wie in II. 5.2. geschehen, daß die Konvektion durch den kapillaren Fluß in einer dünnen Kugelhülle des Volumens $4\pi R_2^2 \cdot d$ (d = Dicke der Kugelhülle) bewirkt wird, so ergibt sich für

$$K = \lambda \cdot d \cdot \frac{\alpha_e}{v_c}$$

$$K = N_K \cdot g_B \cdot F_K \cdot c_B \cdot d.$$

Die hier zu behandelnde Lösung des Problems, die Darstellung der Zentraltemperatur, soll sich auf nachfolgend angegebene Näherungsschritte aufbauen.

1. Näherungsschritt

Für den senkenfreien Fall soll in r = R_2 eine instationäre Temperatur herrschen, als wenn eine Punktquelle in r = 0 vorliegen würde. Diese Näherung ist umso besser, je kleiner die Kugelflächenquelle ist. $R_1 \ll R_2$. Es soll also gelten, wenn keine Senken in r = R_2.

$$\vartheta(R_2,t) = \frac{\alpha_{1e}}{8\pi\lambda R_2}\left(1 + e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right)\right).$$

2. Näherungsschritt

Die temperatursenkende Wirkung der Wärmesenke in r = R_2 auf die Größe ϑ (R_2, t) wird näherungsweise so eingeführt, indem die mittlere Gesamtergiebigkeit der Quelle

$$\overline{Q_1} = \frac{Q_{1\sim}}{2}$$

um die mittlere Senkenergiebigkeit $\overline{Q_2}$ vermindert wird. $\overline{Q_2}$ ergibt sich aus folgender Darstellung,

$$\overline{Q_2} = \frac{4\pi R_2^2}{T} \int_0^T K(v_0 + v_1 \cos\omega_2 t) \cdot \frac{\overline{Q_1} - \overline{Q_2}}{4\pi\lambda R_2} \left(1 + e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}}\right) \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\omega_1 t + y - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right) dt.$$

Für die zeitliche Mittelung nehmen wir einen einfachen periodischen Verlauf der Größe $Q_2(t)$ an. Das ist der Fall, wenn

$$\omega_1 = n \cdot \omega_2 \qquad \text{oder} \qquad \omega_1 = \frac{1}{n}\omega_2$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

Wenn $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ und $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ die elementaren Periodenlängen sind, so ist bei der Mittelung der größere der beiden Werte einzusetzen, z.B. bei $\omega_1 = n \cdot \omega_2$ ist

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} > T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

In beiden Fällen gilt

$$\overline{Q_2} = K \cdot v_0 R_2 \frac{\overline{Q_1} - \overline{Q_2}}{\lambda}$$

bzw. bei

$$n \neq 1: \quad \frac{\overline{Q_1} - \overline{Q_2}}{4\pi\lambda R_2} = \frac{\overline{Q_1}}{4\pi R_2 (\lambda + K v_0 R_2)}.$$

Bei $r = 1$, d.h. $\omega_1 = \omega_2$ folgt nach einfacher Rechnung

$$\frac{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2}{4\pi\lambda R_2} = \frac{Q_1}{4\pi R_2 (\lambda + K R_2 (v_0 + v_R))}$$

mit

$$v_R = \frac{1}{2} v_1 e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}} \cdot \cos\left(\gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right).$$

Daraus folgt für die Gesamtergiebigkeit der Senke

$$Q_2(t) = -K(v_0 + v_1 \cos\omega_2 t) \cdot \frac{Q_{10} \cdot R_2}{2(\lambda + K R_2 (v_0 + v_R))} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right)\right).$$

mit $v_R = 0$, wenn ω_1 ein ganzzahliges Vielfaches von ω_2 ist und umgekehrt, mit $v_R \neq 0$, wenn $\omega_1 = \omega_2$.

Zwecks Vereinfachung der Darstellung schreiben wir

$$Q_2(t) = -\left\{A_0 + A_1 \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right) + \right.$$

$$+ A_2 \cdot \cos\omega_2 t + A_3 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right) +$$

$$\left. + A_4 \cdot \cos\left((\omega_1 + \omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}\right)\right\},$$

wobei

$$A_0 = \frac{K R_2 v_0 \cdot Q_{10}}{\lambda + K \cdot R_2 (v_0 + v_R)},$$

$$A_1 = \frac{K R_2 v_1 \cdot Q_{10}}{2(\lambda + K \cdot R_2 (v_0 + v_R))} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}},$$

$$A_3 = \frac{K R_2 v_1 \cdot Q_{10}}{2(\lambda + K \cdot R_2 (v_0 + v_R))},$$

$$A_2 = A_4 = \frac{K R_2 v_1}{4(\lambda + K R_2 (v_0 + v_R))} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2\alpha^2}}}.$$

Die Zentraltemperatur ist somit, wenn man sowohl die Quellen- als auch die Senkenwirkung berücksichtigt

$$\vartheta(0,t) = \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1}\left(1 + e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)\right) -$$

$$- \left\{\frac{A_0}{4\pi\lambda R_2} + \frac{A_1}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - 2R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right) +\right.$$

$$+ \frac{A_2}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right) +$$

$$+ \frac{A_3}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1-\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left((\omega_1-\omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} - R_1\sqrt{\frac{\omega_1-\omega_2}{2a^2}}\right) +$$

$$\left. + \frac{A_4}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left((\omega_1+\omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} - R_1\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{2a^2}}\right)\right.$$

In anderer Schreibweise

$$\vartheta(0,t) = \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1} - \frac{KR_2 V_0 \cdot Q_{10}}{8\pi\lambda R_2\left(\lambda + KR_2(V_0 + V_R)\right)} +$$

$$+ \frac{Q_{10}}{8\pi\lambda R_1} \cdot e^{-R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - R_1\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)$$

$$- \frac{A_1}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_1 t + \gamma - 2R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}}\right)$$

$$- \frac{A_2}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left(\omega_2 t - R_2\sqrt{\frac{\omega_2}{2a^2}}\right)$$

$$- \frac{A_3}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1-\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left((\omega_1-\omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} - R_2\sqrt{\frac{\omega_1-\omega_2}{2a^2}}\right)$$

$$- \frac{A_4}{4\pi\lambda R_2} \cdot e^{-R_2\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{2a^2}}} \cdot \cos\left((\omega_1+\omega_2)t + \gamma - R_2\sqrt{\frac{\omega_1}{2a^2}} - R_2\sqrt{\frac{\omega_1+\omega_2}{2a^2}}\right) =$$

$$= \frac{q_{1c}}{\dots R_1} - \frac{K R_2 v_c \cdot \dots}{\dots R_2 (\dots + K R_2 (v_c + v_k)} - \dots$$

$$+ I_4 - (I_1 + I_2 + I_3 + I_4).$$

Für eine qualitative Abschätzung der Resonanzbedingungen können die Glieder I_3 und I_4 unberücksichtigt bleiben, da deren Amplitudenfaktoren von denen der übrigen übertroffen werden.

Zu untersuchen bleibt also die Größe

$$\vartheta(0,t) = y = I_0 - I_1 - I_2 .$$

$$y = a_0 \cos(\omega_1 t + \gamma + b_1) -$$
$$- a_1 \cos(\omega_1 t + \gamma - 2b_2) -$$
$$- a_2 \cos(\omega_2 t - b_2).$$

$$y = y(\omega_1, \gamma).$$

Die Bedeutung der Größen a_0 a_1 a_2 und b_1, b_2 ist aus der expliziten Darstellung der Meßgröße $\vartheta(0,t)$ zu ersehen. Für die im folgenden dargestellte Abschätzung spielt die Abhängigkeit der Größen a_0, a_1 und b_1 von der Kreisfrequenz ω_1 keine wesentliche Rolle und wird daher nicht berücksichtigt.

Die Extrema der Größe y folgen aus

$$\frac{dy}{dt} = - a_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \gamma - b_1) + a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \gamma - 2b_2) + a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t - b_2).$$

Mit den hieraus zu ermittelnden Zeitwerten t_m lautet der Ausdruck für die Extrema

$$y_m = a_0 \cos(\omega_1 t_m + \gamma - b_1) - a_1 \cos(\omega_1 t_m + \gamma - 2b_2) - a_2 \cos(\omega_2 t_m - b_2).$$

Die Größe y_m ist in Abhängigkeit von ω_1 und γ zu sehen,

$$y_m = y_m(\omega_1, \gamma).$$

Die Extrem-Einstellung von y_m ist mit Werten von ω_1 und γ zu erzielen, die sich aus folgenden Gleichungen ergeben.

$$\frac{\partial y_m}{\partial \omega_1} = - a_0 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - b_1)\left(t_m + \omega_1 \frac{\partial t_m}{\partial \omega_1}\right) + a_1 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - 2b_2)\left(t_m + \omega_1 \frac{\partial t_m}{\partial \omega_1}\right) + a_2 \sin(\omega_2 t_m - b_2) \cdot \omega_2 \frac{\partial t_m}{\partial \omega_1} = 0.$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial \gamma} = - a_0 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - b_1)\left(1 + \omega_1 \frac{\partial t_m}{\partial \gamma}\right) + a_1 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - 2b_2)\left(1 + \omega_1 \frac{\partial t_m}{\partial \gamma}\right) + a_2 \sin(\omega_2 t_m - b_2) \cdot \omega_2 \frac{\partial t_m}{\partial \gamma} = 0.$$

Berücksichtigt man aus $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ die Beziehung

$$a_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - b_1) - a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - 2b_2) =$$

$$= a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t_m - b_2),$$

so folgt als identisches Resultat für beide verschwindende Differentialquotienten

$$\frac{\partial u_m}{\partial \omega_1} = \frac{\partial u_m}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\omega_2 t_m - b_2 = n \cdot \pi, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Mit diesen t_m -Werten ist auch die Gleichung

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = 0$$

zu erfüllen. Es folgt daraus

$$a_0 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - b_1) = a_1 \sin(\omega_1 t_m + \gamma - 2b_2).$$

Es wurde bisher nicht durch Rechnung untersucht, ob ein Minimum- oder Maximumwert der Größen ψ_m als Funktion von ω_1 und γ dargestellt wird. Gesucht ist natürlich der Minimumwert. Die bisher durchgeführte Rechnung führt zu diesem Ergebnis, was leicht zu erkennen ist, wenn man $a_1 = 0$ setzt.

In diesem Falle gilt nämlich

$$\omega_1 t_m + \gamma - b_1 = n \cdot \pi,$$

$$\omega_2 t_m - b_2 = n \cdot \pi$$

und $\omega_1 = \omega_2$; $\gamma = b_1 - b_2$.

Mit diesen Werten zeigt die graphische Darstellung von

$$y = a_c \cdot \cos(\omega_1 t + \gamma - b_1) - a_2 \cdot \cos(\omega_2 t - b_2)$$

unmittelbar, daß es sich um eine Minimumeinstellung von γ_m handelt. Für den allgemeinen Fall $a_1 \neq 0$ folgt bei Berücksichtigung von

$$\omega_2 t_m - b_2 = n \cdot \pi :$$

$$a_c \sin(\gamma + b_2 - b_1) = a_1 \sin(\gamma - b_1)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für den Phasenwert γ der Heizung.

III. Versuchsaufbau

Bevor der Versuchsaufbau im einzelnen beschrieben werden soll, erscheint es sinnvoll, die Verbindung zwischen der Theorie und der Versuchsrealität herzustellen. Dies geschieht durch einen Vergleich der bei den Berechnungen der Temperaturfelder vorausgesetzten Bedingungen mit den experimentellen Gegebenheiten.

Die Grundvoraussetzung für die mathematische Abhandlung ist die Annahme eines allseitig unbegrenzten, überall homogenen und isotropen Vollraumes. Im Experiment wurde als Umgebungsmedium Sand gewählt, der aufgrund kleiner Unterschiede in Körnung und Packungsdichte natürlich nicht ideal homogen und isotrop ist, jedoch in Näherung diese Voraussetzungen erfüllt. Die Begrenztheit des sanderfüllten Raumes wurde so bemessen, daß das aufgrund geringer Wärmezufuhr relativ kleine Temperaturfeld der Sonde innerhalb dieses Raumes lag.

Im theoretischen System wurden zunächst punktförmige Quellen und Senken eingeführt. Diese stellen natürlich eine Idealisierung dar, da im Innern einer Punktquelle eine unendlich hohe und im Innern der Punktsenke eine unendlich niedrige Temperatur folgen würde, die beide nicht zu realisieren sind. Auch die Kugelflächenquelle stellt eine Idealisierung dar, da ihr keine räumliche Ausdehnung zukommt, die jede reale Quelle haben muß. Ähnliches gilt für den Aufpunkt, den theoretischen Temperaturfühler, der sich nur als räumliches Gebilde realisieren läßt. Im Ver-

such werden hierfür Thermistoren verwendet, die so klein sind, daß man hierbei schon von einer quasi punktförmigen Temperaturbestimmung sprechen kann. Die um den Thermistor gewickelte zylindrische Heizspule ist dagegen von dem Idealbild einer konzentrischen Kugelflächenquelle weiter entfernt. Im weiteren wird die Zusammenstellung Heizwendel-Temperaturfühler kurz als Sonde bezeichnet. Dies soll auch für den Fall gelten, in dem ein homogener Halbraum von der Wärmequelle kontaktiert wird (Hautmeßelement). Der in der Rechnung angenommene harmonische Wechsel der Quellenergiebigkeit hätte sich durch einen Wechselstrom exakt realisieren lassen. Aus bestimmten Gründen wurden Impulse von Rechteckform angewendet, was später noch erläutert werden soll. Eine weitere theoretische Annahme ist, daß die Kugelflächen der Quellen und Senken ohne Zwischenschaltung fremder Medien im unendlichen Vollraum situiert sind. Aus elektrischen Isolationsgründen erfordert die Sondenkonstruktion eine Einbettung des Temperaturfühlers und der Heizspirale in Araldit. Die Kappenhülle der Sonde ist ein Metallzylinder aus Gold oder eine Stahlkanüle. Durch die Einführung der beiden Medien wird die Annahme eines homogenen Vollraumes nicht wesentlich beeinträchtigt.

Auch die Gestaltung der verwendeten Senken weicht von dem Modell der Kugelflächensenke ab, obwohl dieser bereits in der Theorie eine räumliche Ausdehnung zuerkannt worden war. Im Versuch wurde ein Schlauch nahe an der Sonde vorbeigeführt, der pulsierend von Wasser durchflossen wurde. Dadurch entstand ein zylinderförmiges Konvektionsfeld. Während die in der Theorie angenommene Senke eine sinusförmige Ergiebigkeitskomponente hatte, hatten die Schwankungen der

Senkenergiebigkeit im Versuch einen durch die Quetschpumpenaktivität charakterisierten Ablauf. Die Anwesenheit von Wasser und PVC-Schlauchmaterial stellt eine weitere Inhomogenität des Vollraumes dar.

Weiterhin ist die Anordnung von Quelle und Senke zueinander zu erwähnen, die in der Theorie als konzentrisch mit gemeinsamem Aufpunkt im Zentrum angenommen wurde. In der Praxis lagen Sonde und Schlauch nahe nebeneinander, so daß sich Zentrum der realen Quelle und Zentralachse der zylindrischen Senke in enger Nachbarschaft befanden. Die entstehenden Felder waren zwar nicht konzentrisch, überschnitten sich jedoch in einem weiten Bereich, so daß sie sich gegenseitig stark beeinflussen konnten. Diese geometische Anordnung von Temperatur- und Konvektionsfeld im Experiment stellt natürlich die stärkste Abweichung dar, da dadurch die für die theoretische Abhandlung wesentliche Voraussetzung, nämlich die radiale Symmetrie der Temperaturfelder, verlorengeht.

Nun kann man natürlich die Frage stellen, ob die zahlreichen Abweichungen der realen Versuchsbedingungen von den idealisierten Rechenvoraussetzungen es überhaupt zulassen, die mathematischen Darstellungen der Temperaturfelder experimentell nachzuprüfen. Sicher muß eingeräumt werden, daß eine quantitative Verifizierung mit der gewählten Anordnung nicht durchführbar war. Dies war aber auch nicht die Aufgabe des Experimentes. Das wesentliche Ergebnis der Berechnungen lag darin, daß die Temperaturerhöhung im Zentrum der Wärmequelle dann optimal niedrig ausfällt, wenn die Ergiebigkeiten von Quelle und Senke mit gleicher Frequenz und Phase ver-

laufen (Resonanzversuche). Das Ziel der Versuche soll die qualitative Nachprüfung dieser Aussage sein.

III. 1. Wärmequellen

Die Wärmequellen spielen bei den Experimenten eine wichtige Rolle. Es sind metallisch umhüllte Sonden, in deren Innerem sich elektrisch gespeiste Heizwendeln befinden. Sondenhülle und Heizwendel sind voneinander elektrisch isoliert. Im Zentrum der Heizwendel ist der Temperaturfühler situiert. Die stromführenden Drähte von Heizwendel und Temperaturfühler stellen natürlich auch Faktoren dar, die wegen Raumausfüllung und der von Sand verschiedenen Wärmeleitfähigkeit des Drahtmaterials die in der Theorie angenommene Radialsymmetrie des Temperaturfeldes stören. Stromquellen, Wärmeleitelemente (Sonden) und die Schaltung des elektrischen Heizkreises werden im folgenden beschrieben.

III. 1.1. Elektronischer Impulsgenerator

Als Stromquelle wurde zunächst ein Doppelimpuls-Reizgeber (hergestellt im Zentralen Entwicklungs-Laboratorium der Philipps-Universität Marburg) verwendet, der auf zwei Kanälen Rechteckimpulse liefert. Deren Frequenz kann zwischen 0,05 Hz und 50 Hz stufenlos eingestellt werden, wobei im allgemeinen eine Frequenz von 1 Hz benutzt wurde.

Die bereits erwähnte Tatsache, daß im Gegensatz zu dem rechnerisch angenommenen sinusförmigen Wechselstrom Rechteckimpulse verwendet werden, hat folgenden Grund. Einem

Rechteckimpuls kommt eine Impulsbreite Tj zu, die sich errechnet aus Periodendauer T minus Pausendauer Tp. Mittels dieser Größen wird das Tastverhältnis a definiert

$$a = \frac{T_j}{T_j + T_p} = \frac{T_j}{T}$$

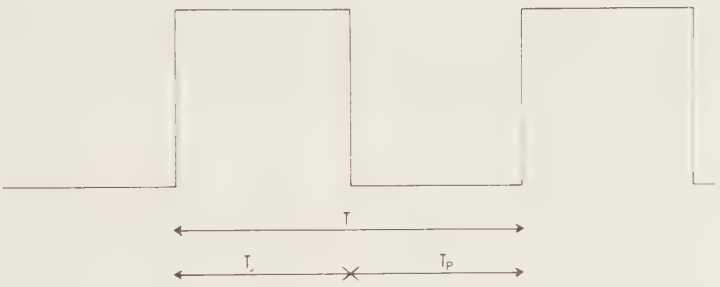


Abb.22. Rechteckimpuls mit Periodendauer T, Impulsdauer Tj und Pausendauer Tp.

Das Tastverhältnis a ist an dem Impulsgenerator zwischen a = 0,05 und a = 0,95 stufenlos einstellbar. Diese im Experiment mögliche Einstellung des Tastverhältnisses war von Vorteil, weil damit zwischen dem Heizimpuls und dem

ebenfalls mehr pulsartigen Strömungsverlauf, der durch die Funktion der Quetschpumpe bedingt war, eine optimalere Phasenzuordnung und damit eine effektivere Konvektionswirkung möglich war.

Die beiden Kanäle I und II des Impulsgenerators konnten in ihrer Phasenlage gegeneinander verschoben werden. Dies geschieht in der Weise, daß die Rechteckimpulse in Kanal II in der Phase verändert werden, und zwar können die Impulse des Kanals II in einem Phasenwinkelbereich von 360°, was einer vollen Periodendauer entspricht, gegenüber Kanal I in beiden Richtungen verschoben werden.

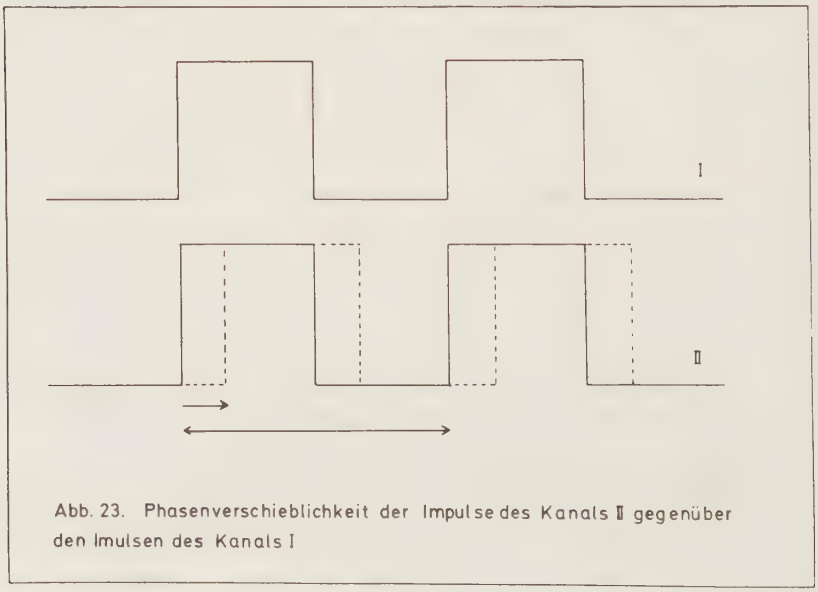


Abb. 23. Phasenverschieblichkeit der Impulse des Kanals II gegenüber den Imulsen des Kanals I

Da zur Heizung der Wärmeleitelemente nur ein Kanal benötigt wurde, wurde der in der Phase verschiebliche Kanal II gewählt, denn im Experiment mußte die Phase der Heizung an die der Strömung angepaßt werden können.

III. 1.2. Impulsgenerator mit mechanischem Wechselschalter

Eine besondere Schwierigkeit bei dem Einsatz des elektronischen Heizgenerators bestand darin, daß neben Phasen- und Amplitudeneinstellung auch eine korrekte Einstellung der Heizfrequenz notwendig war. Die Einstellungskontrolle bestand in einem visuellen Vergleich der gleichzeitigen Darstellung von Strömungs- und Heizimpuls mit einem Doppelstrahloszillographen. Leider war der Gleichlauf der beiden Pulsgeneratoren (Heizgenerator und Quetschpumpe mit Manometeranzeige) nicht von der Güte, daß durch diese Kontrolle die Schwierigkeit behoben gewesen wäre. Natürlich war es in erster Linie die Quetschpumpe, deren Lauf nicht in vergleichbarem Maße frequenzkonstant war. Auch durch schnelle manuelle Nacheinstellung der Heizfrequenz war der Fehler des mangelnden Gleichlaufes der beiden Impulsfolgen nicht in befriedigender Weise zu beheben. Außerdem gab es bei der Temperaturregistrierung Artefakte, wenn die Phase des Heizimpulses verschoben wurde.

Während der Resonanzversuche wurde daher statt des eben beschriebenen elektronischen Rechteckimpulsgenerators ein mechanisch gesteuerter Impulsgeber verwendet.

Die mechanische Impulssteuerung erfolgte durch Koppelung an die Schlauchquetschpumpe, die in Abschnitt III. 2.2. genauer beschrieben werden soll. Auf der beim Pumpvorgang rotierenden Achse ist eine Scheibe angebracht, an deren Umfang U ein Stück U' ausgefräst ist. Auf dem Umfang der Scheibe ist eine kleine Rolle aufgesetzt, die an einem auf der anderen Seite drehbaren fixierten Hebel befestigt ist. Dieser Hebel betätigt den Kontaktstift eines Microswitch (kleiner Schalter). Bei geschlossenem Kontakt kann der von einem Konstanter gelieferte Heizstrom fließen. Solange sich die kleine Rolle auf dem Umfang U befindet, ist der Kontaktstift des Microswitch eingedrückt und der Kontakt unterbrochen. Kommt die Rolle auf den eingefrästen Teil U' , kann sich der Kontakt schliessen und der Heizstrom fließen.

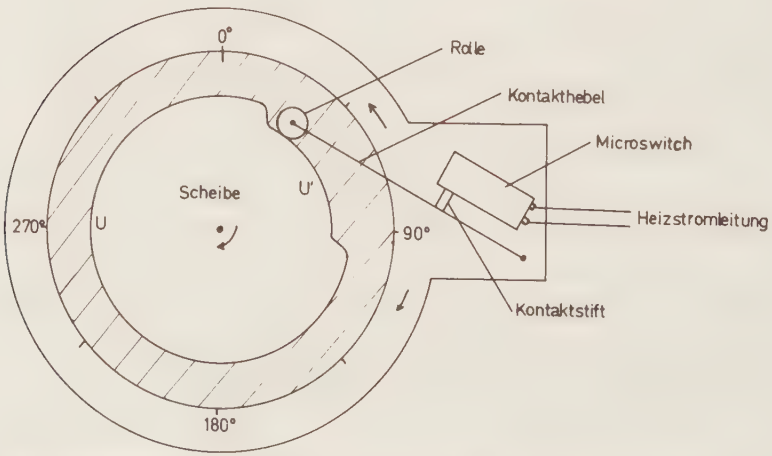


Abb. 24. Mechanischer Impulsgenerator (schematisch). Scheibe rotiert auf Pumpenachse. Äußerer Ring mit Gradeinteilung zur Phaseneinstellung drehbar
Schraffierter Teil feststehend.

Somit ergibt sich ein Rechteckheizimpuls, der in der Frequenz mit dem Strömungsverlauf übereinstimmt, da er direkt von der Pumpe gesteuert wird. Auch an kleine Schwankungen der Pumpfrequenz gleicht sich die Heizung nunmehr exakt an. Durch Verwendung von Scheiben mit verschieden großen Fräsungen sind unterschiedliche Tastverhältnisse realisierbar. Die Phasenlage zwischen Heizimpuls und Strömung kann dadurch verschoben werden, daß die Anordnung von Schalter, Rolle und Kontakthebel um den Scheibenumfang herum verschiebbar ist.

Bei der Phaseneinstellung mit Hilfe des Oszillographen muß der Beginn eines Heizimpulses mit dem eines Strömungspulses zusammenfallen. Da der Strömungsverlauf nicht rechteckförmig ist, besteht die Notwendigkeit der Festlegung, welcher Punkt des Strömungsimpulses mit der Anstiegsflanke des Heizimpulses korrespondieren soll. Eine zusätzliche Schwierigkeit bei der Phaseneinstellung ergibt sich, da die Druckaufnahme im Wasserkreislauf sich stromabwärts von der Wärmequelle befindet, so daß die Zeitdarstellung der Strömungsimpulsfolge nachlaufend ist. Dieser Zeitfehler, abhängig von Pulsgeschwindigkeit und Entfernung Heizquelle - Druckaufnehmer ist wegen der verwendeten starren PVC-Schläuche sehr klein.

III. 1.3. Wärmeleitelemente

Es wurden drei verschiedene Arten von Wärmeleitelementen

verwendet; Zylindersonden, ein Hautmeßelement und Kanülensonden. Allen drei Arten sind gewisse Eigenschaften gemeinsam, die zunächst aufgeführt werden sollen, bevor die konstruktiven Unterschiede abgehandelt werden.

In einem Wärmeleitelement befinden sich zwei verschiedene Gebilde, die Heizwendel und der Temperaturfühler. Als Heizwendel bezeichnet man einen wendelartig gewundenen Draht mit einem Widerstand R_H, der Wärme abgibt, wenn er von Strom durchflossen wird. Die Größe der abgegebenen Wärmeergiebigkeit hängt vom Heizwiderstand R_H und der Heizstromstärke J_{H_0} ab. Bei Gleichstromheizung gilt

$$Q = 0{,}239 \cdot R_H \cdot J_{H_0}$$

wobei 0,239 der Umrechnungsfaktor von elektrischer auf kalorische Leistung ist.

Als Temperaturfühler wurden in allen Sonden Thermistoren, d.h. temperaturabhängige elektrische Widerstände, verwendet. (6). Der "Kaltwiderstand" bei 20° C liegt im Durchschnitt bei etwa $2000\,\Omega$, mit steigender Temperatur nimmt er kontinuierlich ab. Die Messung der Temperatur wird also als Bestimmung des Thermistorenwiderstandes durchgeführt. Hierzu diente eine Wheatstone'sche Brücke, in die der Thermistor eingeschaltet wurde. Die Brücke erhielt von einem Konstanter eine Spannung von 4 Volt. Änderungen des Thermistorenwiderstandes konnten mittels eines Präzisionspotentiometers im anderen Brückenzweig abgeglichen werden, so daß am Ausgang der Brücke keine Spannung auftrat. (Nullabgleich). Als Nullinstrument wurde ein Schreiber verwendet. Da bei Temperaturänderungen kein automatischer Brückenabgleich

vorgesehen war, konnte eine fortlaufende Registrierung und Messung zeitveränderlicher Temperaturen in dieser Weise durchgeführt werden.

Ausgehend vom Nullabgleich kann bei Verstimmung der Brücke durch Temperaturänderung des Thermistors mit der ungefähren Proportionalität von Brückenspannung und verursachender Temperaturdifferenz gerechnet werden, sofern die Temperaturänderung nicht allzu groß ist. Durch eine besondere Schaltungsmaßnahme (Parallelschaltung eines Ohmschen Widerstandes zum Thermistor) kann diese Linearität verbessert werden. Die Dimensionen der Linearisierungswiderstände fallen natürlich bei verschiedenen Ausgangstemperaturen unterschiedlich aus. Um eine fortlaufende Temperaturmessung in einem größeren Temperaturbereich zu ermöglichen, ist daher eine stufenweise Umschaltung der Linearisierungswiderstände vorgesehen. Die wahlweise eingeschalteten Widerstände entsprechen Ausgangstemperaturen von 18^{o} C, 27^{o} C und 37^{o} C. In der Nachbarschaft des jeweils eingestellten Wertes ist eine optimale Temperaturverlaufsdarstellung möglich.

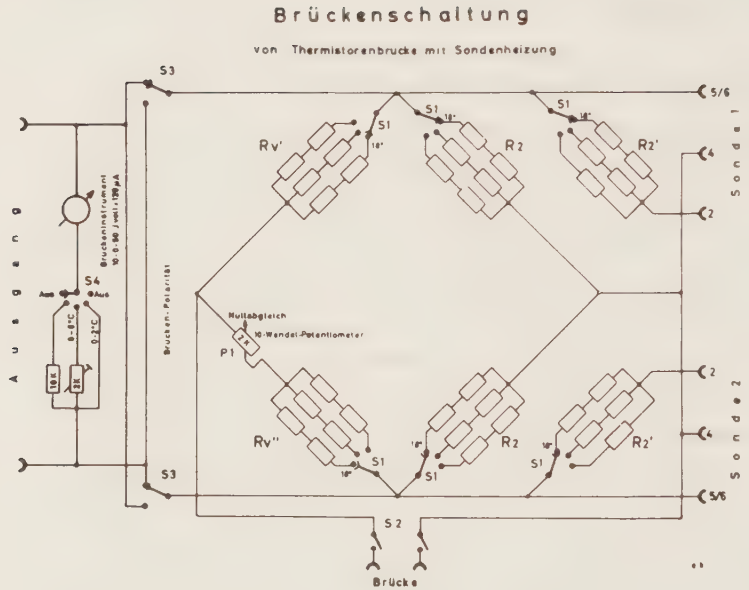


Abb. 25. Brückenschaltung (s. Text)

Zunächst wurde die Brücke mit dem Schreiber als Nullinstrument auf exakte Widerstandsmessung hin überprüft. Anstelle des Thermistors wurden verschiedene Präzisionswiderstände angeschlossen und mit einem Potentiometer im anderen Brükkenzweig der Nullabgleich vorgenommen. Am Abgleichpotentiometer befindet sich eine Skala mit 1000 Skalenteilen, an der der jeweils zum Nullabgleich eingestellte Wert abgelesen

wurde. Die angeschlossenen Widerstandswerte (Ω) und die jeweils am Abgleichpotentiometer eingestellten Skalenwerte (α) wurden dann in einer Eichkurve eingetragen.

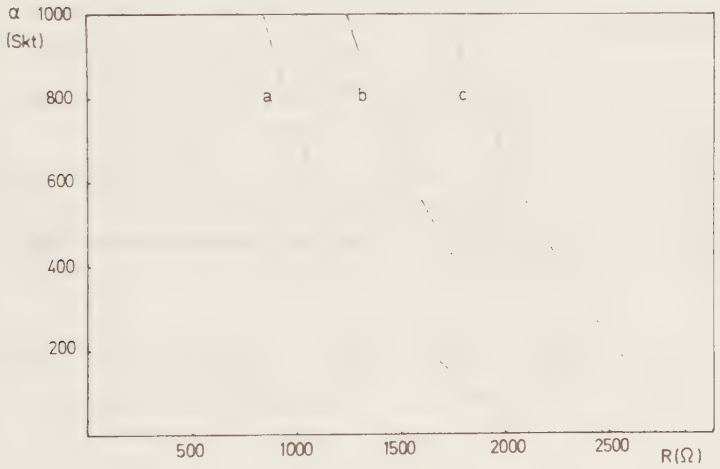


Abb. 26. Eichkurve der Temperatur-Meßbrücke Meßbereiche: 37°C (a), 27°C (b), 18°C (c).

In ähnlicher Weise ging die Temperatureichung der einzelnen Sonden vor sich. Die Sonden wurden in Bohrungen eines Aluminiumblocks in einem Trockenthermostaten eingesteckt, wobei eine Kontaktpaste zugegeben wurde. An diesem Gerät können Temperaturen zwischen Raumtemperatur und 50° C eingestellt werden. Die Temperaturen wurden jeweils in auf-

steigender und absteigender Reihenfolge in Stufen eingestellt. Bei jeder Temperaturstufe wurde das zugehörige α ermittelt. Die Temperaturwerte wurden dann in einer graphischen Darstellung gegen die α -Werte eingetragen, so daß eine Eichkurve zustande kam, aus der für jede Abgleichspotentiometer-Einstellung α die zugehörige Temperatur ablesbar ist.

Die Hautsonde, die nicht in die Bohrungen paßte, wurde in ein Sandgefäß gesteckt, das in ein Wasserbad gestellt wurde. Durch Zugießen warmen Wassers wurde die Temperatur ebenfalls in Stufen erhöht. Eichthermometer mit einer Anzeigegenauigkeit von 0,05° C dienten zur Temperaturmessung.

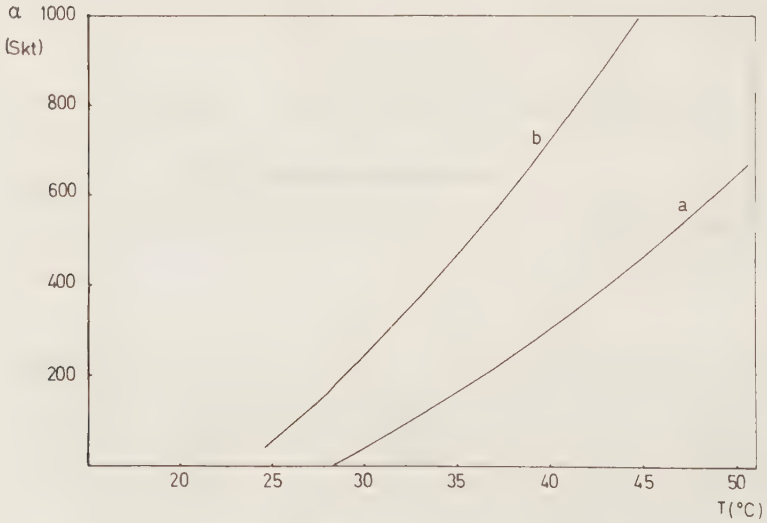


Abb. 27. Thermistoreneichkurve für Th 2. Meßbereiche: 37°C (a), 27°C (b).

Die dynamische Empfindlichkeit der Brücke wurde in ähnlicher Weise ermittelt. Der Thermistor befand sich wieder im Trockenthermostaten. Ausgehend von der Nulleinstellung der Brücke bei einer bestimmten Thermistortemperatur wurde die Temperatur um $0{,}5^{\circ}$ C erhöht und die damit verbundene Brückenspannung gemessen. Das Ergebnis bei der 27° C-Einstellung, dem vorwiegend benutzten Temperaturbereich, lautet

$E = 136 \frac{\text{Skt (Schreiber)}}{^{\circ}C}$

oder 1 Skt (Schreiber) $\hat{=} 7{,}3 \cdot 10^{-3}\,^{\circ}C$.

Diese Empfindlichkeit erwies sich im Bereich der vorkommenden Temperaturen als eine Konstante.

Abschließend soll noch kurz auf die Besonderheiten der verschiedenen Sondentypen eingegangen werden.

Die Zylindersonden haben ihren Namen von einem am Ende spitz zulaufenden kleinen Goldzylinder, in dem der Thermistor mit der umgebenden Heizwendel untergebracht ist.

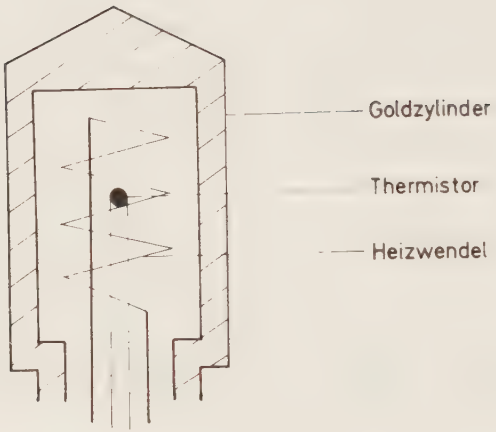


Abb. 28. Zylindersonde (schematisch).

Das Hautmeßelement besteht aus zwei Goldzylindern, die in einen Plexiglaskörper eingefaßt sind und mit ihren relativ großen, kreisförmigen Kontaktflächen auf der Haut liegen. Beide Kontaktkörper besitzen je eine Heizwendel mit zentral gelegenem Thermistor; geheizt wird nur einer. Aus bestimmten Gründen ist es bei der physiologischen Messung der Hautdurchblutung notwendig, daß die Temperaturdifferenz zwischen beiden Thermistoren gemessen wird. Für unsere Zwecke wird nur ein Thermistor und damit nur eine Heizwendel benötigt. Gemessen wird die Absoluttemperatur

des geheizten Thermistors bei konstant angenommener Basistemperatur des Konduktionsmediums.

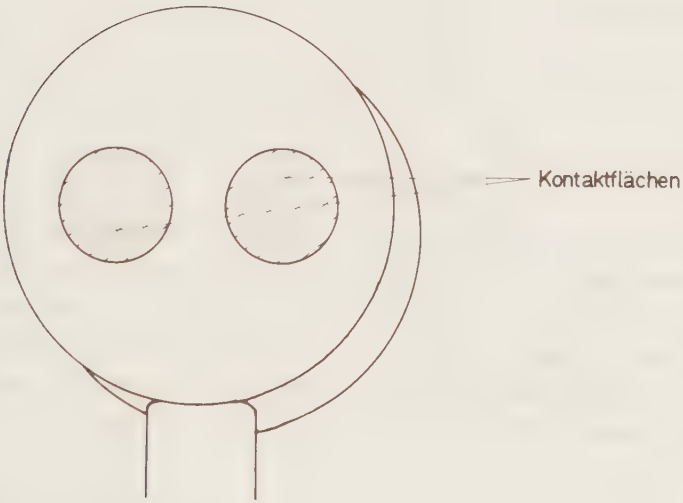


Abb. 29. Hautmesselement (schematisch).

In der Kanülensonde sind Heizwendel und Thermistor im Spitzenbereich untergebracht.

Warum diese verschiedenen Sondentypen eingesetzt werden und welche Verwendung sie finden, soll in einem der folgenden Abschnitte besprochen werden.

Die Sonden erhielten folgende Bezeichnungen:

Zylindersonden: Th 1, Th 2, Th 4.

Hautsonde: Th 5.

Kanülensonden: Th 6, Th 8.

III. 1.4. Elektrischer Heizkreis

Bisher wurden die verwendeten Impulsgeneratoren und die Wärmeleitelemente beschrieben. Beide in Serie geschaltet bilden den Heizkreis.

Sowohl der elektronische als auch der mechanische Impulsgenerator liefern Rechteckimpulse variabler Amplitude, Frequenz, Impulsbreite und Phase. Im Gehäuse, in dem sich die Meßbrücke befindet, sind außerdem ein Grob- und ein Feinregler für die Amplitudeneinstellung des Heizstromes und ein Milliamperemeter eingebaut.

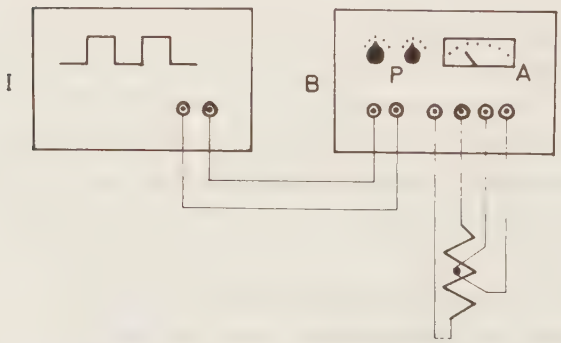


Abb. 30. Elektrischer Heizkreis (schematisch). I= Impulsgenerator. B = Thermistoremeßbrücke. P = Potentiometer grob und fein. A = Milliamperemeter.

III. 2. Konduktions- und Konvektionsraum

Ein Wärmetransport kann so vonstatten gehen, daß die Wärme von Molekül zu Molekül weitergegeben wird, ohne daß diese neben Schwingungs- oder Brown'scher Bewegung eine endliche Geschwindigkeitskomponente besitzen. Diesen Transportvorgang, bei dem die leitende Materie ruht, nennt man Wärmeleitung oder Konduktion.

Befindet sich Materie in Bewegung, so wird Wärme nach Übergang in diese sich mit der Materie fortbewegen. Diesen Vorgang nennt man Konvektion (15). Er findet im Blutkreislauf überall dort statt, wo ein negativer Temperaturgradient Gewebe-Blut herrscht. Das ist vor allem im Kerngebiet der Fall; dort wirken die Arterien als Senken, da die abgeführte Wärme dem Körperkern nicht zurückgeliefert wird. Selbstverständlich erfüllen die Arterien die gleiche Funktion der Konvektion, wenn sie in einem Gewebegebiet erhöhter Temperatur verlaufen, das durch eine künstliche Wärmequelle im Gewebe erzeugt wird.

Gefäße, die dem Modell einer Punktsenke entsprechen, die in der mathematischen Abhandlung neben der Konduktion eingeführt wurde, sind die Kapillaren. Wegen ihrer geringen Länge kann man von der Vorstellung ausgehen, daß die Temperatur einer Kapillarwand konstant ist. Wenn man nun annimmt, daß keine thermische Wechselwirkung zwischen dem in der zuführenden Arterie fließenden Blut und dem Gewebe stattfindet, so wird Blut mit relativ niedriger Temperatur in die Kapillare mit höherer Wandtemperatur

einfließen. Die Folge ist ein fortlaufender Wärmeübergang in Richtung Gewebe-Blut, der noch vor dem Kapillarausgang zur Gleichheit der Temperaturen von Blut und Kapillarwand führt (5). Wenn man annimmt, daß auch der venöse Blutabfluß mit dem Gewebe nicht thermisch wechselwirkt, so kann von einer räumlich eng begrenzten Wechselwirkung gesprochen werden.

In einer "Verschmierungsoperation" stellt man sich nun die Senkenwirkung aller Kapillaren im Temperaturfeld gleichmäßig verteilt vor. So gelangt man zu der mathematischen Vorstellung von Punktsenken, die den Raum lückenlos erfüllen. Leider sind Kapillaren für die Konzeption eines Wärmeüberganges in Resonanz ungeeignet, da sie wegen eines im allgemeinen konstanten Blutflusses nicht über eine pulsatorische Komponente der Senkenergiebigkeit verfügen. Arterien hingegen genügen dieser Konzeption, wenngleich sie der Vorstellung homogen verteilter Punktsenken schlecht entsprechen.

Die Nachbildung eines homogenen Konduktionsraumes im Experiment bietet weniger Probleme.

III. 2.1. Konduktionsmedium

Als Konduktionsmedien werden Sand und Plexiglas verwendet. Sand hat eine Wärmeleitfähigkeit, die der von undurchblutetem Gewebe entspricht. Der vom Sand erfüllte Raum ist so groß, daß bei den verwendeten Temperaturfeldern der Wärmequellen von einem Vollraumproblem ohne Randbedingungen gesprochen werden kann. Im Sandinneren befindet sich eine Zylindersonde, die auf einem wasserdurchflossenen, linear verlaufenden PVC-Schlauch,

dessen Durchmesser in etwa mit dem der Zylindersonde übereinstimmt, aufgeklebt ist. Diese experimentelle Anordnung ist bezüglich der Radialsymmetrie des Temperaturfeldes als auch der Vorstellung homogen verteilter Wärmesenken nur als eine grobe Näherung anzusehen.

Plexiglas als Konduktionsmedium wurde in Verbindung mit einem Hautmeßelement eingesetzt. Der Plexiglaskörper war ein Quader mit der Dimension 6 x 5 x 2 cm. Die Großfläche 6 x 5 cm wurde parallel von zwei dünnen PVC-Schläuchen durchzogen, die durch entsprechende Zylinderbohrungen hindurchgeführt wurden. Eine der Bohrungen war so oberflächlich geführt, daß die Wandung des PVC-Schlauches direkt an der Oberfläche lag. Die andere verlief in einem geringen Abstand nahe der Oberfläche. Der Plexiglaskörper mit dem Hautmeßelement war aus Gründen der Temperaturkonstanz vollkommen in Sand eingebettet.

Beide Konduktionsmedien befanden sich außerdem in einem Wasserthermostaten, wobei natürlich darauf geachtet wurde, daß kein Wasser in den Sand gelangte.

III. 2.2. Wasserkreislauf

Als Konvektionsmedium, welches bei Passage des vom Wärmeleitelement erzeugten Temperaturfeldes Wärme von dort mitführt, diente Wasser. Das umlaufende Wasser wurde aus dem Badgefäß eines Thermostaten entnommen und mit einer kontinuierlich arbeitenden Druck- und Saugpumpe wieder dorthin zurückgeleitet. Eine außerhalb des Bades eingesetzte

Schlauchquetschpumpe besorgte die Pulsatorik der Strömung. Aus zwei Gründen wurde dabei eine der am rotierenden Doppelhebel der Quetschpumpe diametral befindlichen Quetschrollen entfernt. Einmal erreichte man damit eine ungefähre Quetschfrequenz von 1 Hz bei einigermaßen gleichmäßigem Lauf des Antriebsmotors. Bei zwei Quetschrollen ist hierzu eine Motorfrequenz von ca. 0,5 Hz nötig. Dabei zeigte sich aber, daß der extrem langsame Motorlauf in hohem Maße ungleichmäßig war. Zum anderen ergab sich beim Einsatz nur einer Rolle eine ausgeprägtere Pulsatorik. Das erklärt sich in der folgenden Weise. Der in einem halbkreisförmigen Bett gelagerte Silikonschlauch wird bei Doppelrollenbetrieb während eines vollen Umlaufes zeitweise mit einer Rolle, zeitweise aber auch mit zwei Rollen gequetscht. Die Folge ist eine gewisse Glättung der Pulsatorik, was auch bei son konstruierten Quetschpumpen angestrebt wird. Bei Betrieb mit einer Rolle folgt einer Austreibungszeit immer eine Quetschpause. Dies führt zu einem ausgeprägteren "Pulsrhythmus". Die "Pulsfrequenz" entsprach der Umlauffrequenz der Quetschpumpe und lag im allgemeinen bei 1 Hz oder 60/min. Von derselben elektrisch angetriebenen Drehachse, an der die Rolle umlief, wurde auch die Scheibe gedreht, die den Microswitch des mechanischen Impulsgenerators steuerte. Daher hatten Strömungspulse und Heizimpulse exakt die gleiche Frequenz.

Kurz stromabwärts von der Pumpe spaltet sich der Kreislauf zum erstenmal auf in einen Hauptarm mit Durchmesser 11 mm und einen Nebenarm mit Durchmesser 4 mm. Letzterer passiert das Temperaturfeld des Wärmeleitelementes. Es sei hier zu-

nächst eine schematische Übersichtszeichnung eingefügt, die die folgende Beschreibung anschaulicher machen soll. Der umrandete Teil symbolisiert den Ort der Temperaturmessung.

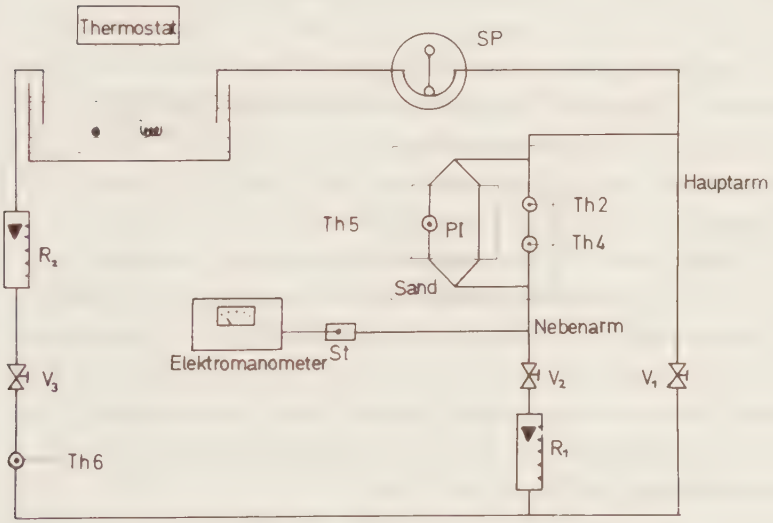


Abb. 31 Wasserkreislauf (schematisch). SP = Schlauchpumpe. Th = Thermistor Pl = Plexiglaskorper V = Ventil R = Rotameter St = Statham-Element

Im Hauptarm liegt weiter stromabwärts das Ventil 1 (V1). Zusammen mit den Ventilen V2 im Nebenarm und V3, das im gemeinsamen Rückfluß liegt, dient es zur Druck- und Durchflußregulierung im Kreislauf. Wenn der Hauptarm durch V1 gedrosselt wird, fließt mehr Wasser durch den

Nebenarm, da der Druck ansteigt. Dort kann die Durchflußmenge mit V2 fein reguliert werden. V3 bestimmt den Druck und die Stromstärke im Gesamtkreislauf. Durch das Zusammenspiel der drei Ventile war eine effektive Beeinflussung des Wasserflusses in allen Teilen des Schlauchsystems möglich. Dies gilt in Grenzen sowohl für die mittlere Stromstärke als auch für die Höhe der Pulsamplitude.

Stromabwärts von der Vereinigungsstelle von Haupt- und Nebenarm beginnt der Rückflußweg zum Vorratsbehälter. Ihm folgend, gelangt man zunächst zu der in einem T-Stück eingeführten Kanülensonde Th 6, mit der die Wassertemperatur registriert wird. Nach dem schon erwähnten Ventil V3 folgt als letzte Station vor dem Vorratsgefäß das Rotameter R2. Es handelt sich dabei um ein senkrecht stehendes wasserdurchströmtes Glasrohr mit Kalibrierung, in dem sich ein kleiner, rotierender Kegel mit Spitze nach unten befindet. Je nach Stromstärke wird der Kegel in verschiedener Höhe gehalten, so daß auf der Glasrohrskala die Durchflußmenge angezeigt wird (11).

Wenn man dem Nebenarm folgt, gelangt man an eine Aufspaltung in drei Wege, an denen sich die Kontaktflächen der Sonden befinden. Anschließend folgt ein T-Stück, das zu einem Statham-Element führt. Dieses wandelt die ankommenden Druckimpulse in elektrische Spannungsschwankungen um, die von einem Elektromanomerter (Hellige) verstärkt werden. Von dort werden sie zu Oszillographen und Schreiber geleitet, wo sie sichtbar gemacht bzw. registriert werden können. Es folgt das Ventil V2 und anschließend das Rota-

meter R1, das die Durchflußmenge im Nebenarm mißt. Es ist sehr wichtig, diese Größe zu kennen, da sie ja ein Maß für die "Senkenergiebigkeit" des strömenden Wassers im Temperaturfeld in der Umgebung der Sonde ist. Schließlich folgt die Einmündung in den Hauptarm.

In der Zeichnung sind noch der Thermostat und eine Isolierung um die Zuführung zum Nebenarm berücksichtigt. Ihre Funktion und die Gründe für ihren Einbau werden bei der Besprechung der Vorversuche (IV.2.) dargelegt.

III. 3. Registriergeräte

Die besondere Natur der Versuchsanordnung sowie die im weitesten Sinne nur annähernde Übereinstimmung der theoretischen und experimentellen Voraussetzungen läßt eine quantitative Theoriebestätigung nicht erwarten. Zur qualitativen Deutung der Versuchsergebnisse waren daher geeignete Registriergeräte von besonderer Bedeutung. Es kamen hier zwei Geräte zur Anwendung: ein 6-Kanal-Schreiber und ein Speicheroszillograph.

III. 3.1. Schreiber

Der verwendete Papier-Schreiber (Rikadenki) ist in der Lage, auf sechs Kanälen gleichzeitig wichtige Parameter zu registrieren, was eine gute Übersicht über den Versuchsablauf ermöglicht.

Die Empfindlichkeiten, d.h. die Spannungen, die zum Vollausschlag der Federn führten, konnte man für jeden Kanal getrennt in Stufen zwischen 1 mV und 5 V wählen. Der Nullpunkt, d.h. der Punkt, an dem sich die Feder bei Eingangsspannung 0 befindet, kann über die ganze Papierbreite hin willkürlich festgelegt werden.

Da bei den Versuchen Schwingungsverläufe zu registrieren waren, spielte die Schreibergeschwindigkeit eine wichtige Rolle. Sollten die Einzelimpulse mit ausreichender Breite aufgezeichnet werden, mußte eine hohe Geschwindigkeit gewählt werden. Meistens kam es jedoch darauf an, die als Amplitudenschwankungen auftretenden langsamen Temperaturveränderungen (Hüllkurve) zu registrieren, so daß in der Regel ein langsamer Papiertransport vorgezogen wurde. Man konnte zwischen sechs Stufen von 400 mm/h bis 1600 mm/min (ca. 0,7 cm/min bis 160 cm/min) wählen.

Zwei der Kanäle (3 und 4) sind jeweils mit dem Ausgang einer Wheatstoneschen Brücke verbunden, die zur Messung der temperaturabhängigen Thermistorenwiderstände dienten. An Brücke 1 werden die bei den Resonanzversuchen alternativ eingesetzten Sonden Th 2, Th 4 und Th 5 angeschlossen, an Brücke 2 die Sonden Th 6 und Th 8, deren Hauptfunktion die Überwachung der Wasser- oder der Sandtemperatur war.

Ein weiterer Kanal (6) erhält sein Eingangssignal von dem

Elektromanometer. Dieses Gerät diente dazu, mit Hilfe eines Statham-Elementes die Druckschwankungen des pulsatorischen Wasserstromes, die als Strömungspulse interpretiert wurden, in elektrische Spannungsschwankungen umzuwandeln.

Schließlich wurde ein viertel Kanal (1) mit dem Ausgang der Impulsgeneratoren belegt. So konnten die rechteckigen Heizimpulse mitgeschrieben werden.

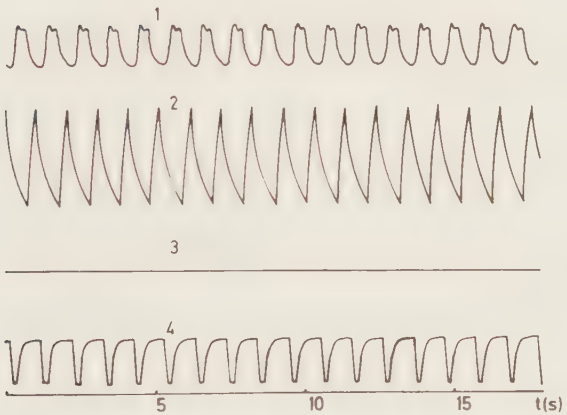


Abb. 32. Schreibung mit 80 cm/min Papiergeschwindigkeit. 1: Elektromanometer. 2: Beheizte Sonde. 3: Sandtemperatur mit unbeheizter Sonde. 4: Heizstrom.

III. 3.2. Oszillographen

Als Sichtgerät wurde ein 2-Kanal-Speicheroszillograph DM 64 der Firma Telequipment verwendet.

Ursprünglich war mit einem 2-Kanal-Oszillographen R 5030 der Firma Tektronix gearbeitet worden, der aufgrund seiner Differenzverstärkereingänge ein sehr störungsfreies Bild, vor allem von der leicht verbrummten Elektromanometerspannung, lieferte. Da aber sehr kleine Frequenzen (1 Hz) benutzt wurden, konnte kein stehendes Bild erzeugt werden. Dies war aber unbedingt nötig, um die Schwingungen der Heizspannung mit denen der Wasserströmung hinsichtlich Frequenz und Phase vergleichen zu können.

Diese Möglichkeit bietet der Einsatz des Speicheroszillographen. Durch die besondere Beschaffenheit seines Leuchtschirmes ist er in der Lage, das Bild bis zu einer Stunde nach der Passage des Elektronenstrahles nachleuchten zu lassen. Damit konnten trotz der bei der geringen Frequenz nötigen langsamen Ablenkgeschwindigkeit des Strahles die interessierenden Vorgänge im Zusammenhang betrachtet werden. Durch die Speicherung war es auch möglich, in längerer Verlaufsbeobachtung Frequenz- oder Amplitudenschwankungen zu erkennen (z.B. hinsichtlich der Pumpenaktivität).

Kanal I zeigte den Verlauf der Elektromanometerspannung, Kanal II den der von dem Impulsgenerator gelieferten Heizspannung.

IV. Vorversuche

Bevor die eigentlichen Resonanzversuche in Angriff genommen werden konnten, mußten zunächst einige Vorversuche durchgeführt werden. Sie dienten dazu, die verschiedenen Bedienungs- und Regulierungsmöglichkeiten kennenzulernen und zu erproben. Sie sollten aber auch die Frage beantworten, ob der Versuchsaufbau allen Anforderungen gerecht werden konnte, und welche Änderungen gegebenenfalls vorgenommen werden mußten.

IV. 1. Impulsheizung mit variablen Parametern

Der elektronische Impulsgenerator erlaubte es, die Parameter Amplitude, Frequenz und Tastverhältnis in weiten Bereichen stufenlos einzustellen.

Bei der Beheizung der Sonde im konduktiven Medium durch elektronische Impulse mit unterschiedlichen Zeitverläufen sind für die Zentraltemperatur (in der Heizwendel) folgende Verläufe zu erwarten:

a. Wenn Gleichstrom verwendet wird, kommt nach dem Einschalten ein kurzzeitig flacher, dann steiler und schließlich wieder ein flacherer Temperaturanstieg zustande, der nach einiger Zeit zu einem praktisch konstanten Plateau führt. Eine Aufheizkurve dieser Art wurde in Kapitel II. 1.3. mathematisch dargestellt. Nach dem Abschalten des Heizstromes geht die Temperatur kurzzeitig langsam, dann schnell und

schließlich wieder langsam auf das Ausgangsniveau zurück. Diese Abheizkurve hat die Gestalt einer "umgekehrten" Aufheizkurve.

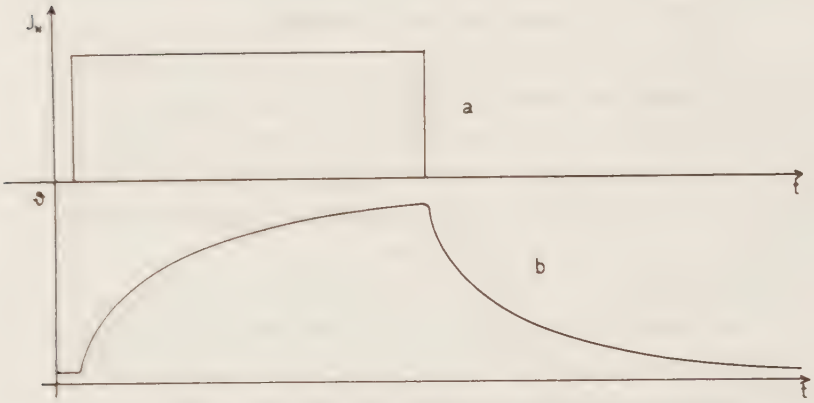


Abb 33 Heizstromstärke J_H (a), Auf- und Abheizkurven (b).

b. Eine Impulsheizung mit Rechteckimpulsen kommt praktisch durch ständiges Abwechseln von Ein- und Ausschalten eines Gleichstromes zustande. Wenn diese Impulse einander in großem zeitlichen Abstand folgen und entsprechend lang andauern, dann entstehen einzelne Auf- und Abheizkurven wie unter a.

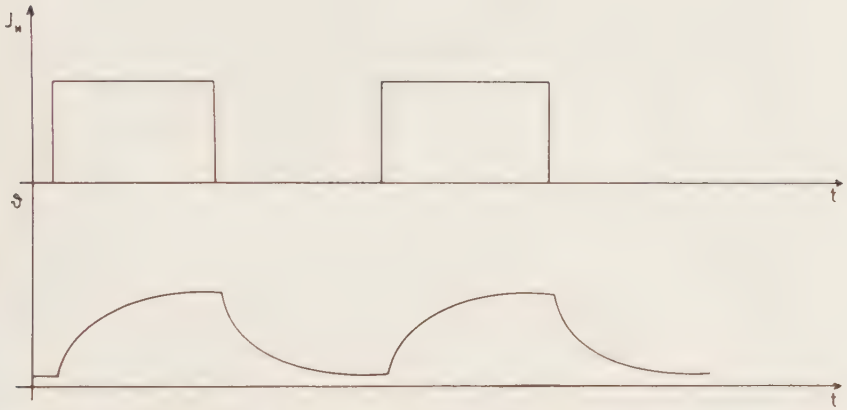


Abb. 34 Impulsheizung mit Rechteckimpulsen sehr niedriger Frequenz.

Dieser Fall ist allerdings nur mit extrem niedriger Impulsfrequenz zu realisieren, da die Geschwindigkeit der Temperaturveränderungen im konduktiven Medium bei der gegebenen Wärmekapazität der Sonden relativ gering ist.

c. Wenn die Impulse einander mit relativ hoher Frequenz folgen, entsteht eine gleichstromähnliche Temperaturkurve. Bei den verwendeten Sonden ist dies bei Frequenzen oberhalb 20 Hz der Fall.

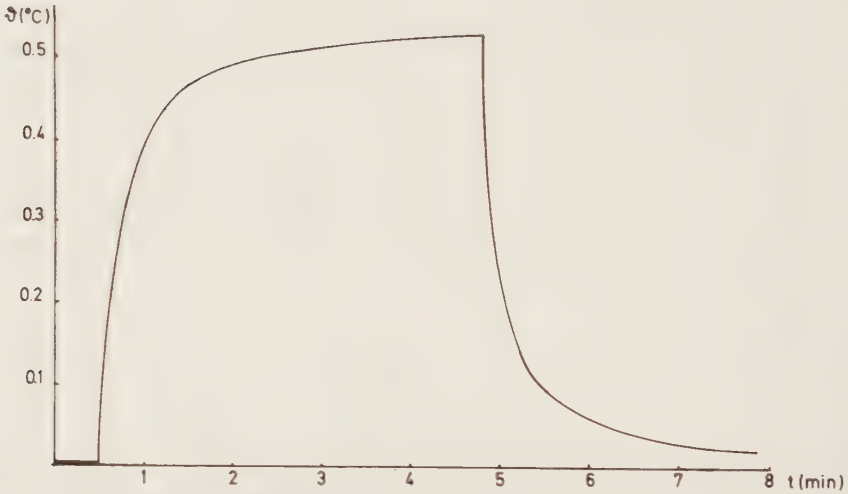


Abb. 35. Heizung der Sonde Th5 mit Rechteckimpulsen.
$\nu = 50$ Hz, $I_{\sim} = 5$ mA.

d. Sollen die Impulse dagegen eine Frequenz von ca. 1 Hz haben, wie später bei den Resonanzversuchen, werden die Heizimpulse so rasch folgen, daß dazwischen keine Rückkehr zur Ausgangstemperatur mehr möglich ist, aber zu langsam, um eine gleichstromähnliche Kurve zu erzeugen. Die Folge sind Schwingungen mit einer Zunahme der mittleren Temperatur, die ihrerseits wieder die Form einer Aufheizkurve hat. Man spricht hier von "einschwingendem Zustand". Wie bei einer Gleichstromkurve geht auch bei Impulsheizung der sich immer mehr abflachende Anstieg in ein Plateau über. Dann befindet

sich das System im "eingeschwungenen Zustand" oder "steady state", der bereits in der mathematischen Behandlung der Wechselergiebigkeit betrachtet wurde. Jeder Veränderung der Heizparameter während eines Versuches (z.B. Amplitudenänderung) folgt zunächst ein Einschwingungsvorgang, der dann in einen neuen steady state übergeht.

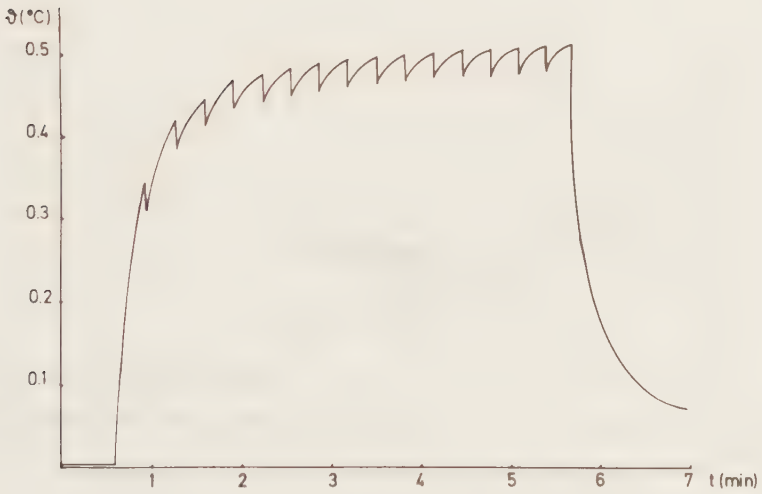


Abb. 36. Heizung der Sonde Th 5. $\nu = 0{,}05$ Hz. $a = 0{,}95$. $J_{H_0} = 4$ mA.

Im Anschluß an diese Überlegungen wurden in einigen Versuchsreihen die Temperaturverläufe bei verschiedenen Heizparametern registriert, um Aufschluß über das Verhalten der Versuchsanordnung zu gewinnen.

Zunächst wurde ein Versuch durchgeführt, bei dem die Frequenzen 0,1 Hz, 1 Hz, 10 Hz, 20 Hz und 50 Hz nacheinander eingestellt wurden, bei konstanten Werten von a = 0,2 und J_{H_e} = 10 mA. Die Schreibergeschwindigkeit war 16 cm/min.

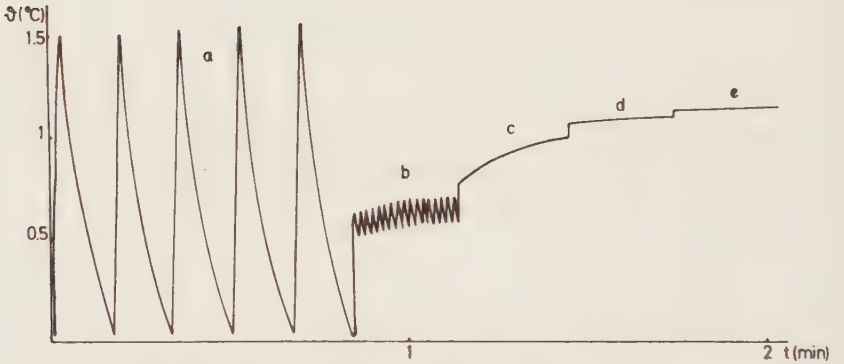


Abb. 37. Heizung der Sonde Th5 mit den Frequenzen 0.1 Hz (a), 1 Hz (b), 10 Hz (c), 20 Hz (d), 50 Hz (e).

Die Schreibung wurde jeweils zur Frequenzumschaltung kurz unterbrochen.

Als nächstes wurde bei fester Frequenz ν = 0,1 Hz und festem J_{H_e} = 10 mA das Tastverhältnis a variiert. Drei Werte wurden eingestellt: a = 0,2, a = 0,5 und a = 0,75. Die mit steigendem Wert von a auftretende Zunahme der

stationären Endtemperatur (steady state) ist dadurch zu erklären, daß bei gleicher Frequenz und Stromstärke die Impulsdauer und damit die abgegebene Wärmeleistung

$$Q = 0{,}239 \cdot R_H \cdot J_H^2 \cdot a$$

größer wurde.

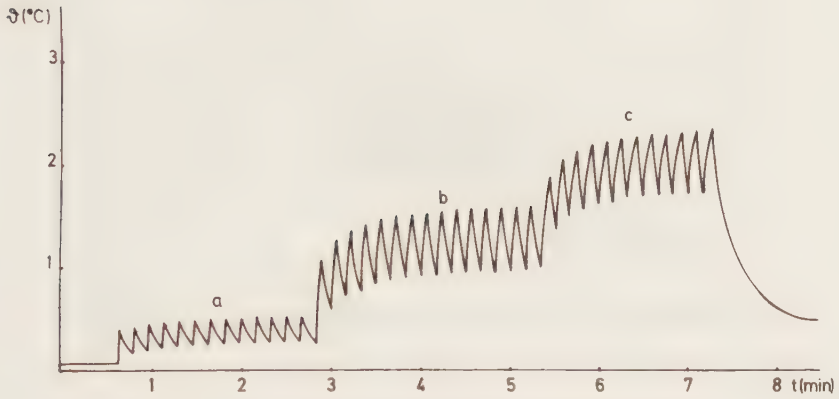


Abb. 38. Heizung der Sonde Th5 mit den Tastverhältnissen 0.2(a), 0.5(b), 0.75(c).

Schließlich wurde noch bei festgehaltener Frequenz = 0,1 Hz und festem Tastverhältnis a = 0,2 die Heiz-

stromstärke J_{H_c} in den Stufen 10 mA, 20 mA und 30 mA variiert.

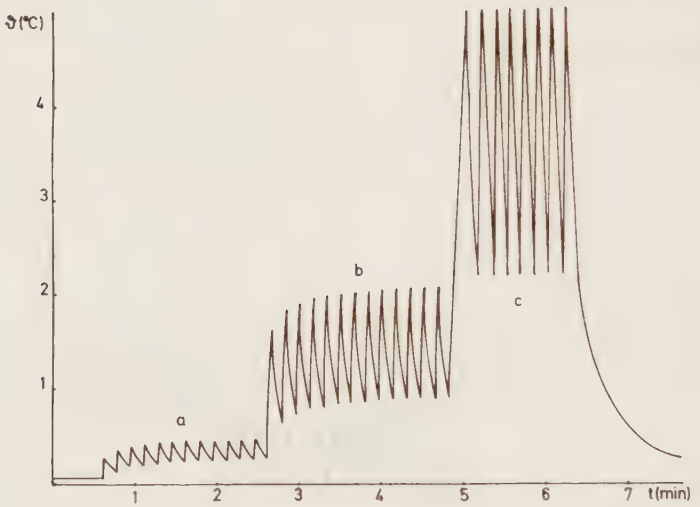


Abb.39 Heizung der Sonde Th5 mit den Heizstromstärken 10mA(a), 20 mA(b),30 mA(c).

Alle drei Versuchsreihen wurden bei stehendem Wasserkreislauf mit Sonde Th 5 an Brücke 1 ausgeführt.

In den späteren Resonanzversuchen wurde dann ein mechanisch gesteuerter Impulsgenerator eingesetzt, da die Gleichlaufeinstellung der Heizimpulse im Bezug auf die Strömungspulse mit Hilfe des Phasenreglers des elektronischen Impulsgenerators Schwierigkeiten

bereitete. Da aber auch hierbei rechteckige Heizimpulse zustande kamen, sind die obigen grundlegenden Untersuchungen über Rechteckimpulse auch für diese Anordnung gültig.

IV. 2. Einstellung des Wasserkreislaufes

Nachdem nun die wichtigsten Variationsmöglichkeiten der Impulsheizung experimentell nachgeprüft waren, mußte die Funktionsfähigkeit des Wasserkreislaufes erprobt werden.

Die schematische Übersichtszeichnung im Abschnitt III. 2.2. gibt bereits den endgültigen Aufbau des Wasserkreislaufes wider. Ursprünglich war die Anordnung wesentlich einfacher gewesen.

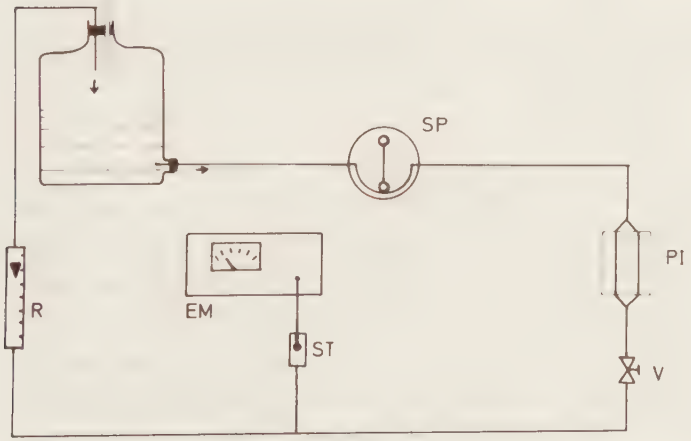


Abb.40. Ursprünglicher Aufbau des Wasserkreislaufes SP= Schlauchquetschpumpe. PI = Plexiglaskörper. V=Ventil. St= Statham-Element. EM=Elektromanometer. R=Rotameter.

Als Vorratsgefäß wurde eine große Flasche verwendet, die seitlich unten eine Auslaßöffnung hatte. In dem Stopfen, der die Flasche nach oben abschloß, war ein Rohr eingelassen, durch das das Wasser wieder zurückfließen konnte, sowie ein Rohr, das freien Luftzutritt gestattete. Die Serienanordnung von Quetschpumpe, Plexiglaskörper, Ventil, Statham-Element und Rotameter ist aus Abb. 40 ersichtlich.

Die beiden Wasserschläuche durch den Plexiglaskörper sind relativ groß. Der Durchmesser des dritten Schlauches hingegen, der sich in dem Sandgefäß befindet, ist sehr dünn gewählt, (Innendurchmesser 1 mm), weil geprüft werden sollte, ob auch bei kleiner Wasserstromstärke mit einer effektiven Konvektionswirkung zu rechnen ist. In einem T-Stück aus Kunststoff befindet sich außerdem die Thermistorsonde Th 6, die als Temperaturfühler im Wasser dient.

Mit dieser Anordnung wurden die ersten Konvektionsversuche durchgeführt.

Bei zunächst noch ausgeschalteter Pumpe wurden mittels elektronischem Impulsgenerator Heizimpulse mit der Frequenz 1 Hz, dem Tastverhältnis a = 0,5 und der Amplitude J_{H_o} = 5 mA erzeugt. Nach Erreichen eines eingeschwungenen Zustandes (steady state) wurde die Quetschpumpe eingeschaltet, so daß jetzt die Temperaturfelder der Wärmeleitelemente von einem pulsierenden Wasserstrom durchflossen wurden. Die sich ergebenden Temperaturverläufe wurden registriert, dann wurde der Kreislauf angehalten

und die Temperaturschreibung einige Zeit fortgesetzt. Dieser Versuch wurde mit den Sonden Th 1, Th 2 und Th 4 im Sandgefäß und Th 5 auf dem Plexiglaskörper durchgeführt.

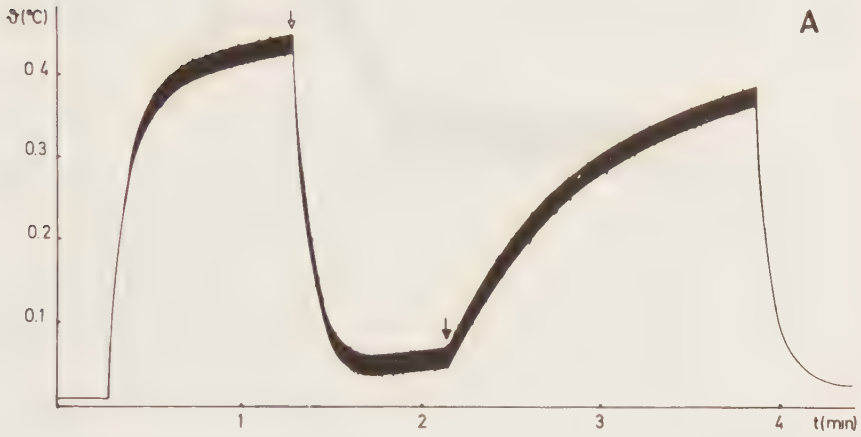


Abb. 41 A. Versuchsschreibung mit Sonde Th 5. Bei ↓ Beginn, bei ↓ Stop des Wasserflusses.

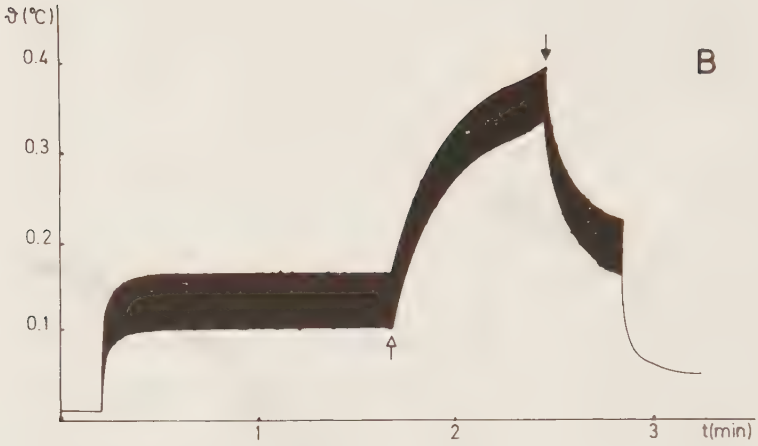


Abb.41B. Sonde Th 2.

Es zeigten sich verschiedene Resultate. Bei der Sonde Th 5 konnte tatsächlich die erwartete Temperaturerniedrigung festgestellt werden, die der Tatsache entsprach, daß nun die "Senke" in Aktion trat und Wärme zusätzlich abtransportiert wurde. Nach Abstellen der Pumpe stellte sich auch der Ausgangswert der Temperatur wieder ein.

Ganz im Gegensatz dazu stand das Verhalten der Sonden Th 1, Th 2 und Th 4, die bei Wasserfluß mit einer starken Erwärmung reagierten. Der Grund für diese

Diskrepanz zu dem erwarteten und bei Th 5 gefundenen Temperaturverlauf mußte ausfindig gemacht und ausgeräumt werden.

Es gibt zwei Erklärungsmöglichkeiten für den irregulären Temperaturverlauf. Entweder spielt die unterschiedliche Sondenkonstruktion eine Rolle (was allerdings äußerst unwahrscheinlich ist), oder der Fehler ist am Meßplatz zu suchen.

Zunächst wurde der Versuch mit Th 4 wiederholt, wobei außerdem einige Zeit nach dem Abschalten der Sondenheizung die Pumpe noch einmal in Betrieb gesetzt und der Temperaturverlauf weiter beobachtet wurde. Dabei zeigte sich, daß auch dann eine starke Temperaturerhöhung mit der Pumpenaktion verbunden war, wenn keine Heizung mehr stattfand, was dafür sprach, daß die irreguläre Temperaturkurve nicht mit der Sondenheizung zusammenhing. Ein vollkommener Ausschluß der Sondenheizung als Ursache für die Temperaturkurve bei Konvektionsbedingungen lieferte der Versuch, bei dem ohne Sondenheizung allein der Wasserfluß eine Temperaturerhöhung am Meßort verursachte.

Es war also eindeutig, daß mit dem fließenden Wasser den Wärmeleitelementen Th 1, Th 2 und Th 4 Wärme zugeführt worden ist.

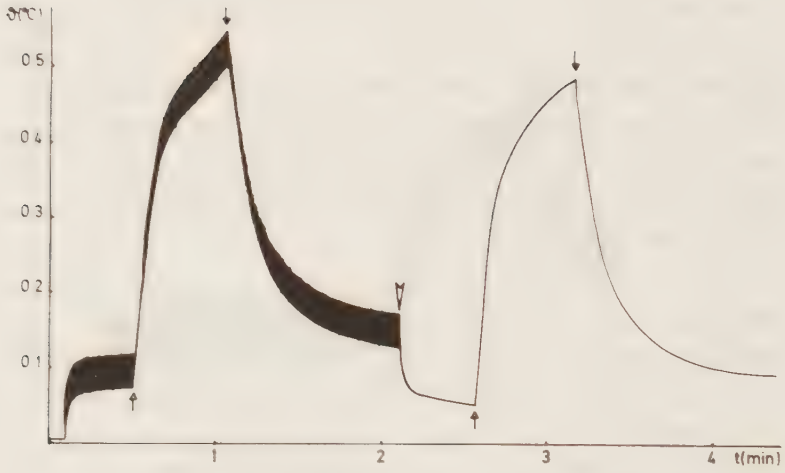


Abb 42 Versuchsschreibung mit Th 4 Bei ▽ Heizung abgeschaltet Bei ↑ Beginn, bei ↓ Stop des Wasserflusses.

Aufgrund dieser Beobachtung wurde in den Wasserkreislauf anstelle der Vorratsflasche ein Glasbecken eingeführt, dessen Inhalt durch einen Thermostaten auf konstanter Temperatur gehalten wurde. Durch ein Kontaktthermometer wurde bei einer eingestellten Temperatur eine Badheizung alternierend ein- und ausgeschaltet, so daß die Temperatur in einem engen Bereich um die Solltemperatur schwankte. Ein in der Stromstärke passend gewählter Wasserfluß durch eine Kühlschlange im Bad sorgte dafür, daß die Istwert-

schwankungen klein ausfielen. Durch eine quirlartige Rührvorrichtung wurde das Wasser außerdem ständig in Bewegung gehalten, so daß eine temperaturgerechte Durchmischung gewährleistet war.

An dem Thermostaten ist eine Druck-Saugpumpe vorhanden, die zur Umwälzung des Wassers im äußeren Kreislauf diente. Der gleichmäßige Wasserausstoß dieser Pumpe war dem der nachfolgenden Quetschpumpe überlagert. Die Wasserstromstärke konnte zusätzlich durch ein Regulierventil der Druck-Saugpumpe beeinfluß werden. Auch war es nun möglich, das Wasser umlaufen zu lassen, ohne die Quetschpumpe einzuschalten. Dabei entstand natürlich eine nicht pulsierende Strömung.

Nach dieser Änderung war eigentlich damit zu rechnen, daß aufgrund der immer konstanten Temperatur des aus dem Vorratsbehälter fließenden Wassers die vorher beobachteten irregulären Verläufe ausbleiben würden. Zur Kontrolle der Thermostatenwirkung wurde mittels Th 6 die Wassertemperatur mitregistriert. Zunächst wurde wieder ein Versuch mit Th 5 gemacht, wobei das Wasser nur durch die Druck-Saugpumpe umlaufend gehalten wurde. Nach einer Aufheizung mit = 1,2 Hz und J_H = 5 mA bis zum steady state wurde nun einigemale abwechselnd mit dem Regulierventil der Druck-Saugpumpe der Wasserfluß gestoppt und wieder auf verschiedene Stärken gebracht.

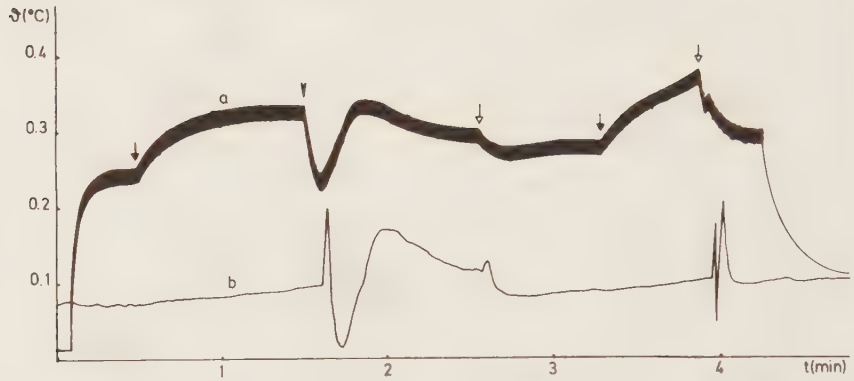


Abb. 43 Versuchsschreibung mit Th5 (a), Wassertemperatur über Th6 (b) Wasserfluß gestopt bei ↓, gering bei ▼, maximal bei ⇓.

Es zeigte sich nach dem ersten Kreislaufstop der erwartete Temperaturanstieg, da die Wärmemitführung durch das Wasser ausblieb. Nach Einstellen einer geringen Wasserstromstärke zeigte sich anfänglich die erwartete Temperaturerniedrigung. Ihr folgte eine unvorhergesehene Steigerung mit einem Maximum, das die Temperatur bei stehendem Kreislauf weit übertraf. Anschließend fiel die Temperatur und errechte nach einiger Zeit den Wert, der der erwarteten Konvektionswirkung der eingestellten Wasserstromstärke entsprach. Temperaturver-

läufe ähnlicher Art wurden auch mit dem Temperaturfühler Th 6 registriert.

Alle diese Versuche ließen sich in der folgenden Weise deuten: Ausgehend von einer endlichen Wasserstromstärke ergab sich bei Wasserstop eine monoton verlaufende Temperaturerhöhung, wie sie bei dem Wechsel der Konvektionsbedingungen zu erwarten war. Bei umgekehrtem Wechsel der Konvektionsbedingungen (Wasserstop - Wasserfluß) hingegen war der abfallende Temperaturverlauf kurz nach Einsetzen des Flusses von einem relativ hohen Temperaturberg überlagert. Trotz dieses Artefaktes ist festzustellen, daß die Annahme einer Senkenwirkung des fließenden Wassers im wesentliche ihre Bestätigung fand.

Einige Tage später, als der Versuch zur Bestätigung wiederholt wurde, war dieses Resultat nicht mehr erzielbar. Die Temperaturkurve hatte nun einen noch weniger deutbaren Verlauf. Dieses negative Ergebnis wurde über beiden Schläuchen des Plexiglaskörpers gewonnen. Wieder fielen bei Öffnung der Drosselung in der Th 6-Schreibung die Temperaturspitzen auf.

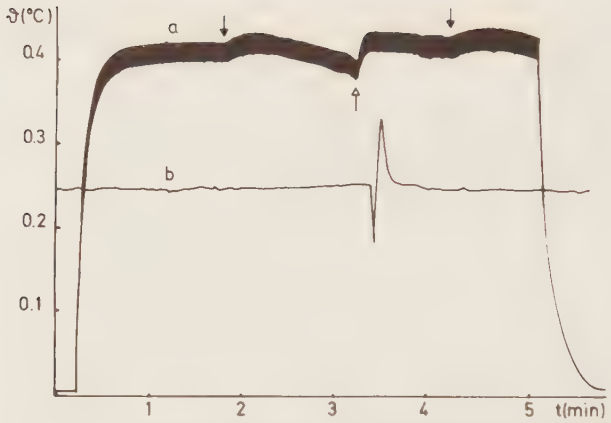


Abb. 44. Versuchsschreibung mit Th 5 (a), Wassertemperatur über Th 6 (b). Wasserfluß gestopt bei ↓, maximal bei ↑

Es fragte sich nun, wie der Temperaturverlauf an dem anderen Meßplatz, dem dünnen Schlauch, auf dem Th 2 und Th 4 aufgeklebt waren, aussehen würde. Sonde Th 4 wurde als Wärmeleitelement benutzt, mit Th 2 wurde die Wassertemperatur mitregistriert. Damit war es möglich, die nahe stromaufwärts von der beheizten Sonde gegebene Wassertemperatur zu erfassen. Bei dem Versuch zeigte sich wieder ein irregulärer Temperaturverlauf. Besonders auffallend war der gleichsinnige Verlauf beider Meßgrößen. Da der Temperaturfühler Th 2 stromaufwärts vom Wärmeleitelement plaziert war, der

Abstand zwischen beiden aber zu groß war, als daß das Temperaturfeld des einen den anderen hätte beeinflussen können, lag die Folgerung nahe: Die irregulären Temperaturverläufe beruhten auf einer Kontakterwärmung durch das vorbeifließende Wasser.

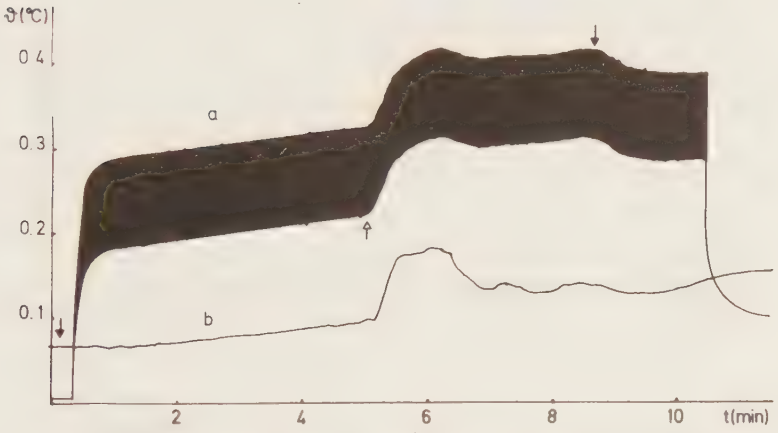


Abb.45. Versuchsschreibung mit Th 4, Wassertemperatur über Th 2 Wasserfluß gering bei ↓, stark bei ↑.

Die Ursache für die unerwarteten Effekte war aber damit noch nicht gefunden. Denn eigentlich sollte ja die Wassertemperatur durch den Thermostaten konstant gehalten werden. Wie kam es aber dazu, daß nach Öffnen

des Regulierventils zunächst wesentlich wärmeres Wasser nachfloß, das zu einer Temperaturerhöhung an der beheizten Sonde und dem Temperaturfühler führte?

Einen wichtigen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage lieferte eine zufällige Entdeckung. Um oszillographisch zu prüfen, ob die Heizleistung während eines längeren Versuches völlig konstant blieb, wurde eine Aufheizung bei stehendem Wasserkreislauf durchgeführt, die zur Kontrolle mitgeschrieben wurde. Dabei fiel ein Wellenberg im Temperaturverlauf auf, der gerade dann sichtbar wurde, wenn der Untersucher direkt neben dem Plexiglaskörper stand, auf dem die beheizte Sonde aufgesetzt war. Dieser Effekt konnte zuverlässig reproduziert werden und war umso stärker, je länger der Untersucher neben dem Plexiglaskörper verweilte.

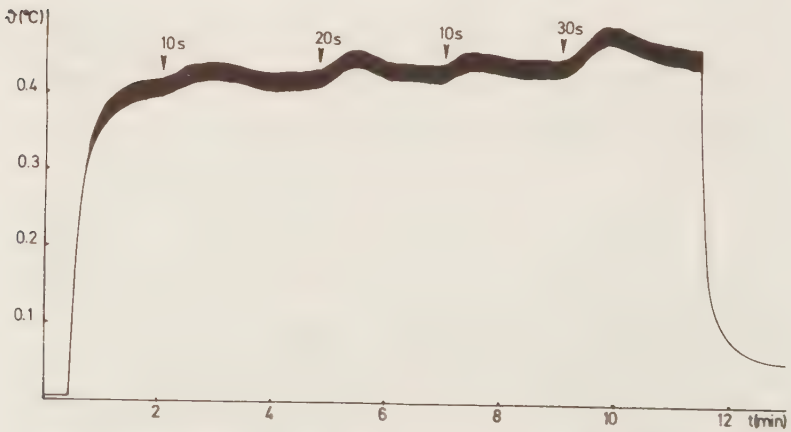


Abb. 46. Versuchsschreibung mit Th 5. Bei ▼ Stehen neben dem Plexiglaskörper (darüber jeweils die Dauer des Stehens).

Durch die Speicherungsmöglichkeit des Oszillographen ließ sich sicher nachweisen, daß sich die Heizstromstärke während des ganzen Versuches nicht verändert hatte. Es lag also nahe zu vermuten, daß dieser Effekt durch die Ausstrahlung der Körperwärme des Untersuchers zustande gekommen war, was bei der hohen Empfindlichkeit der Thermistorfühler nicht abwegig schien.

Um diese thermische Beeinflussung auszuschließen, wurde der Plexiglaskörper ebenfalls in dem Sandgefäß untergebracht. Das Sandgefäß, das jetzt sämtliche Wärmeleitelemente und den Temperaturfühler Th 8 beherbergte, wurde außerdem in das Wasserbad des Thermostaten eingestellt.

Der Körperwärmeeffekt war der Anstoß zu einem Versuch, bei dem die Natur der irregulären Temperaturverläufe in halb quantitativer Form geklärt werden konnte.

Dieser Versuch hatte folgende Voraussetzungen. Die Thermostatensolltemperatur lag bei 21,8° C, die Raumtemperatur bei 23,2° C, also um 1,4° C höher. Das Wasser durchfloß den Kreislauf mit maximaler Stromstärke. Seine Temperatur wurde mit Th 5 gemessen, die Sandtemperatur mit Th 8 registriert. Der Kreislauf wurde nach einiger Zeit gestoppt, die Wassertemperatur in dem Schlauchabschnitt, dem Th 5 auflag, blieb unverändert. Als wieder maximale Strömung einsetzte, ergab sich ein Temperaturanstieg von knapp 11 Skalenteilen der Papierkalibrierung auf dem Schreiber, der sich

innerhalb 3 Minuten wieder völlig zurückbildete. Nach einiger Zeit wurde wieder gestoppt und etwas später erneut maximal geöffnet, wobei ein Ausschlag von fast 19 Skalenteilen entstand, der sich ebenfalls nach 3 Minuten völlig zurückgebildet hatte. Die Temperatur des umgebenden Sandes war während des ganzen Versuches praktisch konstant geblieben.

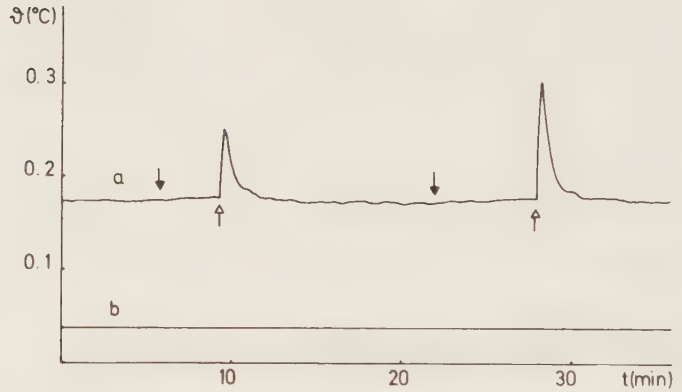


Abb.47. Versuchsschreibung Th 5(a), Sandtemperatur über Th8(b).

Bei ↓ Stop, bei ↑ maximale Durchströmung.

Für die Interpretation des Ergebnisses ist wesentlich, daß der erste Stopp mit 11 Skalenteilen Ausschlag 3,6 min gedauert hatte, der zweite mit 19 Skalenteilen Ausschlag

hingegen 6,3 min. Es war also offensichtlich, daß das Ausmaß der Erwärmung von der Dauer des Stopps abhing. Eine wichtige Beobachtung war auch, daß die Rückbildung der Ausschläge beidemale 3 min gedauert hatte. Der Versuch konnte insgesamt folgendermaßen gedeutet werden:

Während des Stopps stand das Wasser im zuführenden Schlauch zwischen Druck-Saugpumpe und Sandgefäß und war der höheren Umgebungstemperatur ausgesetzt. Je länger der Stopp dauerte, desto mehr erwärmte sich das Wasser. Nach Wiedereinsetzen des Wasserstromes war das im Schlauch erwärmte Wasser unter Th 5 hindurchgeflossen und hatte zu der beobachteten Erwärmung geführt. Darauf folgte Wasser der Thermostatentemperatur, das abkühlte. Die Dauer der erhöhten Temperatur hängt von der Wasserstromstärke ab, die in beiden Fällen gleich war. In analoger Weise waren die bisher störenden Temperatureffekte zu erklären.

Aufgrund dieses Ergebnisses wurde der Wasserkreislauf auf den Stand gebracht, wie er auf der schematischen Übersicht in Abb. 31 zu sehen ist. Es wurde eine Gliederung des Kreislaufes in Haupt- und Nebenarm durchgeführt, wobei der Wasserfluß im Hauptarm auch bei Stopp im Nebenarm ununterbrochen blieb. Außerdem wurde der Standort der Wärmeleitelemente möglichst nahe der Aufzweigung gewählt, so daß die zwischen Aufzweigung und Meßort bei Stopp stehende Wassermenge, die durch die Umgebung thermisch beein-

flußt werden konnte, gering war und keinen wesentlichen Temperatureinfluß erbrachte. Außerdem wurde um den Zuführungsweg bis zum Übergang ins Sandgefäß eine Wärmeisolierung angebracht, die aus einer dicken Watteschicht und darum einer weiteren Aluminiumfolie bestand. Schließlich wurde bei den folgenden Versuchen die Thermostatentemperatur möglichst genau der Raumtemperatur angepaßt. Auf diese Weise gelang es, die unerwünschten Kontakterwärmungen weitgehend zu unterdrücken. Die Aufgliederung in Haupt- und Nebenarm zog den Einbau eines zweiten und dritten Ventiles und des zweiten Rotameters nach sich.

Bei einem neuerlichen Versuch mit Th 2 zeigte sich, daß tatsächlich keine Kontakteffekte mehr auftraten. Allerdings war bei verschiedenen Durchströmungsstärken auch die erwartete Konvektionswirkung nicht vorhanden. Dies lag daran, daß die in dem dünnen (ca. 1 mm) Schlauch fließende Wassermenge zu gering war. Der dünne Schlauch wurde daher durch einen anderen ersetzt, der in Beschaffenheit und Maßen (ca. 4 mm) genau den Schläuchen im Plexiglaskörper entsprach, auf denen Th 5 aufgesetzt war. Nun konnten auch mit Th 2 und Th 4 bei Drosselung des Kreislaufes Temperatursteigerungen erzielt werden.

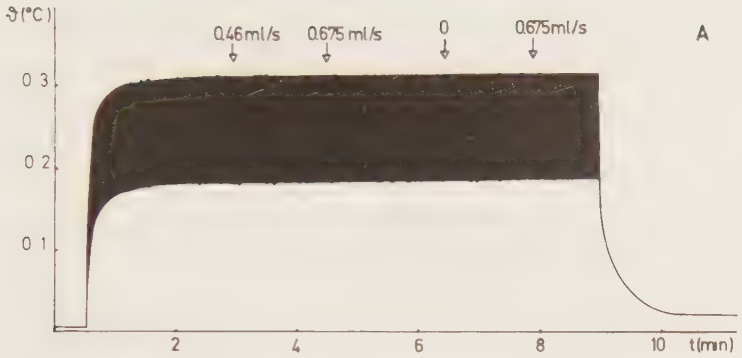


Abb 48 A Sonde Th 2 auf dunnem Schlauch. Zu Beginn kein Wasserfluß, bei ↓ Anderung der Wasserstromstarke Die angegebenen Werte gelten für den gesamten Nebenarm; der viel geringere Fluß in dem Schlauch an Th 2 wurde nicht separat gemessen.

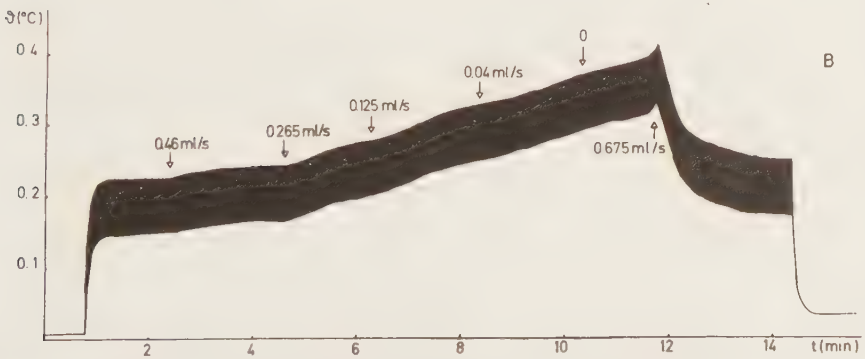


Abb. 48 B. Sonde Th 2 auf dickerem Schlauch. Wasserstromstärke zu Beginn 0.675 ml/s

Es gelang schließlich, mit dem vorhandenen Versuchsaufbau nachzuweisen, daß das in den Schläuchen strömende Wasser eine Konvektionswirkung ausübte, wobei umso stärkere Temperaturerniedrigungen erzielt wurden, je größer die Stromstärke war.

Wie im Abschnitt III. 1.2. bereits erwähnt, stellte sich heraus, daß der elektronische Impulsgenerator für die Resonanzversuche nicht geeignet war. Er wurde durch den mechanisch von der Pumpe gesteuerten Impulsgenerator ersetzt.

Der Versuchsaufbau war somit für den Beginn der Resonanzversuche ausreichend vorbereitet.

V. Resonanzversuche

Die Besonderheit der Resonanzversuche besteht darin, daß nicht nur die Wärmeergiebigkeit der Heizwendel, sondern auch die Konvektionswirkung des vorbeifliessenden Wassers regelmäßige Pulsationen aufweist. Die Pulsation des Wasserflusses besorgte eine Quetschpumpe, die das Wasser mit einer kreisförmig umlaufenden Rolle stoßweise in den Schläuchen vorwärts preßte. Wie bereits ausgeführt, war die Erzeugung der Heizimpulse mechanisch an die Pumpe gekoppelt worden, so daß deren Frequenz mit der Pumpfrequenz identisch war.

Es sollte nun durch eine geeignete Phasenverschiebung der Heizimpulse nachgewiesen werden, daß bei einem bestimmten Phasenwinkel Resonanz im Sinne eines zeitlichen Zusammentreffens der Scheitelwerte der Quellen- und der Senkenergiebigkeit auftritt, wobei der konvektive Wärmetransport maximal ist. Es war also ein Phasenwinkel φ zu bestimmen, bei dem eine optimal niedrige Temperaturerhöhung zu registrieren war.

Da der Verlauf der Wasserströmung nicht rechteckförmig war, sondern ein durch die Quetschpumpenaktion bestimmtes Aussehen hatte, war nicht evident, welcher Punkt des Strömungsverlaufes zur Festlegung der Phasenlage der Anstiegsflanke des Heizimpulses als Bezugspunkt dienen sollte. Also ergab sich die Notwendigkeit einer willkürlichen Festlegung der Phasenlage $\varphi = 0$. Diese wurde mit Hilfe der oszillographischen Zeitdar-

stellungen wie in der folgenden Abbildung schematisch wiedergegeben definiert: der Fußpunkt der Anstiegsflanke, der eine ausreichend genaue Einstellung gewährleistete, wurde als Bezugspunkt gewählt.

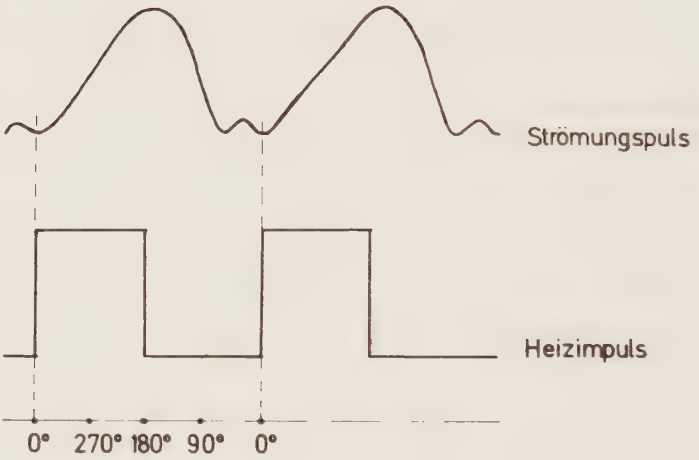


Abb.49. Definition der Phasenlage 0°.

Bei Verschiebung der Heizimpulse nach links (frühzeitiger einfallende Heizimpulse) ergeben sich steigende Phasenwinkelwerte. (s. Abb. 49).

Zur Phaseneinstellung an dem mechanischen Impulsgenerator diente eine Kalibrierung mit Gradeinteilung auf dem bereits beschriebenen drehbaren Ring, auf dem der Microswitch zur Steuerung des Heizstromes angebracht war. Mit diesem Ring konnte der Microswitch um den Umfang der ihn steuernden Scheibe herumgedreht werden (s. Abb. 24). Diese Scheibe wurde so auf die angetriebene Pumpenachse aufgesetzt, daß bei der Einstellung 0^{o} mittels der Kalibrierung des Ringes in der Oszillographendarstellung (Abb. 49) die oben als Phasenwinkel 0^{o} definierte Lage der Zeitdarstellung erzielt wurde. Bei Phasenverschiebung durch Drehung des Ringes konnte der neue Phasenwinkel direkt an der Gradeinteilung abgelesen werden.

Das Tastverhältnis des Heizimpulses hängt von der Größe des ausgefrästen Anteiles am Umfang der den Microswitch steuernden Scheibe ab. Das Ausmaß der Ausfräsung ist im Winkelmaß angegeben und wird Kontaktwinkel genannt. Es standen Scheiben mit Ausfräsungen von 45^{o}, 60^{o}, 90^{o}, 120^{o}, 180^{o}, 210^{o}, 240^{o}, 270^{o}, 300^{o} und 330^{o} zur Verfügung, so daß Tastverhältnisse von 0,125, 0.166, 0.25, 0.33, 0.5, 0.58, 0.66, 0.75, 0.83 und 0.92 realisierbar waren.

Die ersten Versuche wurden mit der Sonde Th 5 bei einer Pumpfrequenz von ca. 1 Hz, einem Heizstrom von etwa 9 mA und einem Tastverhältnis von 0.5 durchgeführt. Beim Aufheizen bis zum steady state wurde die Phaseneinstellung 0^{o} belassen. Dann wurde nacheinander auf 90^{o}, 180^{o}, 270^{o}

und wieder 0^{o} Phasenwinkel eingestellt. Es zeigten sich starke Temperaturveränderungen, wobei der niedrigste Wert bei Phasenwinkel 90^{o} und der höchste bei 270^{o} lag. Um dies klarer zu zeigen, wurde noch einmal 90^{o}, 180^{o}, dann wieder 90^{o} eingestellt. Die Abb. 50 zeigt den registrierten Temperaturverlauf.

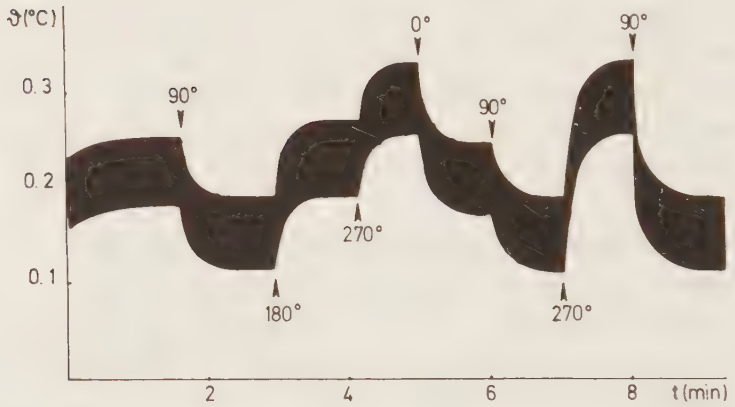


Abb. 50. Nach Aufheizen mit Phasenwinkel 0° Einstellung anderer Phasenwinkel bei ▼

Versuche mit verschiedenen Steuerscheiben, also verschiedenen Tastverhältnissen, variablen Frequenzen und Heizstromamplituden ergaben sämtlich ähnlich starke Temperatureffekte. Allerdings stellte sich bald heraus, daß es sich hierbei nicht um die gesuchte Resonanz

handelte. Bei einer echten Resonanzwirkung ist zu fordern, daß ihre Intensität von der Höhe der mittleren Wasserstromstärke abhängt. Ebenso ist zu verlangen, daß die Stärke des Resonanzeffektes abnimmt, wenn die Amplitude der Druckschwankungen verkleinert wird, was mit der Verringerung des Wechselflusses gleichbedeutend ist.

Um letzteres zu prüfen, wurde eine Art Windkessel in den Kreislauf eingebaut. Ein mittels T-Stück dicht hinter der Quetschpumpe ausgeleiteter Schlauch wurde senkrecht nach oben geführt. Die in dem Schlauch stehende, bei Pumpenbetrieb pulsierende Wassersäule wurde mittels eingeblasener Luft komprimiert, so daß die Pulsationen deutlich gedämpft wurden. Dies zeigte sich auch in der Druckregistrierung mittels Elektromanometer und Schreiber. Die oben beschriebenen Versuche wurden nun mit starker Dämpfung der Pulsationen im Wasserkreislauf bei gleicher mittlerer Wasserstromstärke wiederholt, wobei die eben postulierte Abnahme des "Resonanzeffektes" nicht festgestellt werden konnte.

Nunmehr folgten Versuche mit starker Drosselung der mittleren Wasserstromstärke. Auch hier blieben die Temperaturveränderungen bei Phasenverschiebung erhalten. Den endgültigen Beweis, daß es sich nicht um echte Resonanzeffekte handelte, lieferte folgender Versuch. Der von der Rolle der Pumpe gequetschte Silikonschlauch wurde aus dem U-förmigen Bett entfernt, so daß die Pumpentätigkeit zu Heizimpulsen, aber nicht mehr zu Strömungspulsen führte. In das Schlauchbett wurde ein

beiderseits blind endendes, leeres Schlauchstück eingelegt. Obwohl die Pumpe also frustran arbeitete und das Wasser im Kreislauf nicht pulsierte, waren die bekannten Effekte kaum vermindert vorhanden, so daß es sich mit absoluter Sicherheit nicht um Resonanzen handeln konnte.

Es ergab sich somit die Frage, wodurch diese deutlichen Temperaturausschläge bei Phasenverschiebung, die zunächst ganz den erwarteten Resonanzwirkungen zu entsprechen schienen, verursacht wurden. Anschliessend mußte die Ursache möglichst weitgehend ausgeschaltet werden, um sicher sein zu können, daß Temperaturveränderungen bei Resonanz zwischen Konvektion und Heizung nicht durch derartige Effekte überdeckt wurden. Von diesen Bemühungen hing das Gelingen des Nachweises der aufgrund der Berechnungen erwarteten Resonanzen ab.

Zunächst war festzustellen, daß der Fehler nicht am Wasserkreislauf liegen konnte, da er auch beim völligen Fehlen von Pulsationen des konvektiven Mediums aufgetreten war. Äußerst unwahrscheinlich war eine Unregelmäßigkeit in der Temperaturregistrierung mittels der Sonden. Es lag so nahe, den elektrischen Heizkreis näher zu überprüfen.

Bei vielen Versuchen mit verschiedenen Steuerscheiben (die verschiedenen Tastverhältnissen entsprechen) ließ sich feststellen, daß die Mitte der Heizimpulse bei unterschiedlichen Phaseneinstellungen, die zu Pseudoresonanzen führten, jeweils mit einem bestimmten Punkt

des Strömungspulses koinzidierte. Anders ausgedrückt: Je größer der an dem Umfang einer Steuerscheibe ausgefräste Winkel, desto früher mußte der Heizimpuls einfallen, desto größer also der Phasenwinkel sein, um die Pseudoresonanzen zustande kommen zu lassen.

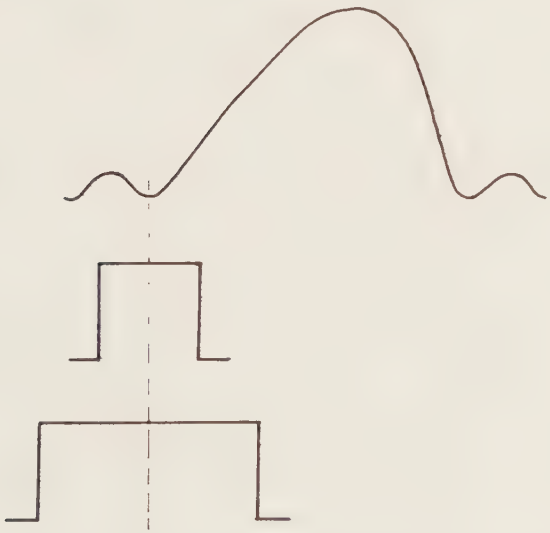


Abb.51. Zur Entstehung der Pseudoresonanzen. (S.Text)

Einen wichtigen Hinweis ergaben die Versuche mit Dämpfung der Strompulsamplitude mittels der beschriebenen Windkesselanordnung. Hierbei nahm die Zeitdarstellung des Druckablaufes eine veränderte, dreigipfelige Form an.

Auffällig war, daß hier andere Phasenwinkeleinstellungen zu den Effekten führten, als bei den Versuchen ohne Windkessel. Dies ließ vermuten, daß die Form der Strömungspulse für die Entstehung der Pseudoresonanzen von besonderer Bedeutung war.

Alle gewonnenen Ergebnisse führten zu der Vermutung, daß die Ursache der unerwünschten Effekte in der Quetschpumpe zu suchen war. Es ist bereits erwähnt worden, daß die Pumpfrequenz kleinen Schwankungen unterworfen war, die es unmöglich machten, für die Resonanzversuche den elektronischen Impulsgenerator mit wesentlich stabilerer Frequenz zu verwenden. Bei genauer Beobachtung, vor allem bei relativ kleinen Pumpfrequenzen, ist zu erkennen, daß auch innerhalb einer einzelnen Umdrehung der Pumpenlauf nicht gleichmäßig ist. Wenn die Quetschrolle gerade auf den Schlauch auftrifft, und anfängt das Wasser auszupressen, wird sie etwas abgebremst und damit langsamer. Am Ende des gequetschten Schlauchstückes macht sich der Wegfall der Quetscharbeit durch eine geringe Beschleunigung und damit einen etwas schnelleren Lauf bemerkbar. Daher dreht sich auch die auf der Pumpenachse sitzende Steuerscheibe im Verlauf einer Umdrehung mit schwankender Geschwindigkeit. Die Phaseneinstellung geschieht dadurch, daß der Metallring, auf dem der Microswitch sitzt, um die rotierende Steuerscheibe herum gedreht wird. Betätigt nun die Fräsung der Steuerscheibe den Schalter, wird der Kontakt dann lange geschlossen bleiben, wenn die Steuerscheibe langsam rotiert, und entsprechend kürzer, wenn die Steuerscheibe sich schneller dreht. Die Heizimpulse haben also verschieden lange Dauer, je nachdem, in welcher Phase der Umdrehung die

Fräsung den Microswitch betätigt. Dies ist nun seinerseits davon abhängig, an welcher Stelle des Umlaufkreises der Schalter steht, bzw. welcher Phasenwinkel zwischen Pumpvorgang und Heizungsauslösung eingestellt ist. Da verschiedene Heizimpulsdauer durch Veränderung der Wärmeergiebigkeit zu unterschiedlichen Temperaturerhöhungen führt, fand sich die Ursache der unerwünschten Effekte also letztlich in dem ungleichmäßigen Periodenverlauf der Pumpe.

Neben der Pseudoresonanz, bei der eine maximale Erniedrigung der Temperatur auftrat, war bei einer um ca. 180^{o} verschobenen Phasenlage eine maximale Erhöhung der Temperatur zu beobachten. Die beiden extremen Temperaturen sind dem Maximum und dem Minimum der Quetschpumpendrehgeschwindigkeit zuzuordnen. Die den Temperaturextrema entsprechenden Heizimpulsbreiten konnten oszillographisch registriert werden. Es ergab sich sogar bei einer Quetschpumpe mit Konstantregelung der Umlaufgeschwindigkeit ein relativer Unterschied der Impulsbreiten von 14 %.

Nachdem die Ursache der "Pseudoresonanzen" gefunden war, konnte weiter nach den erwarteten Effekten gesucht werden. Allerdings war schon klargeworden, daß diese schwieriger zu erzeugen waren, als ursprünglich angenommen. Deshalb wurde nach noch günstigeren Versuchsbedingungen gesucht. Einmal mußte die Ursache der Pseudoeffekte durch Verwendung einer möglichst frequenzkonstanten Pumpe ausgeschaltet werden. Zum anderen waren günstigere Parameter für Heizimpulse und Wasserströmung zu wählen.

Hierzu diente eine neue Versuchsreihe. Der Wasserkreislauf wurde mit Hilfe der Quetschpumpe wieder pulsierend durchströmt. Da es nahelag, eine möglichst große Konvektionswirkung anzustreben, wurde die Kanülensonde Th 6 verwendet, die direkt im Hauptstromweg des Wasserkreislaufes lag. Diese Sonde wurde zunächst mit Gleichstrom beheizt. Ziel des Versuches war der Nachweis, daß die Pulsationen des strömenden Wassers in der Sonde Th 6 zu synchronen Temperaturschwankungen führen. Dieser Beweis gelang, wie die folgende Abb. zeigt.

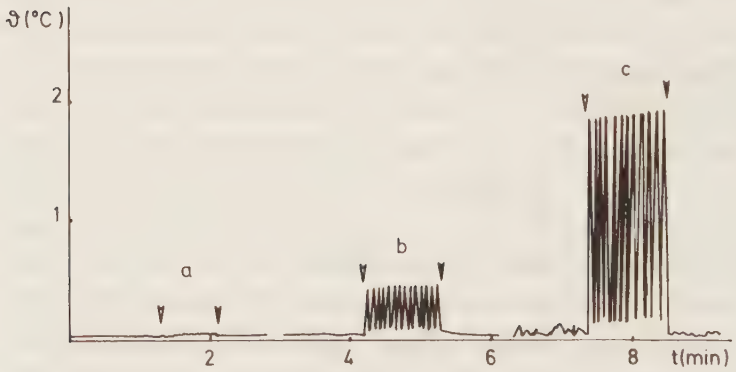


Abb.52. Gleichstromheizung Th6 mit 40 mA (b), 80 mA (c), bzw keine Heizung(a). Wassergleichströmung ca. 15 ml/s, zwischen ▼ und ▼ Pulsationen mit 0.25 Hz.

Weitere Versuche mit veränderten Parametern führten zu folgenden Erkenntnissen:

Die bei pulsatorischen Konvektionsänderungen auftretenden synchronen Temperaturschwankungen stellen sich umso deutlicher dar

1. je größer die Heizstromstärke ist,
2. je größer die Pulsamplitude und die mittlere Wasserstromstärke sind und
3. je kleiner die Pulsfrequenz ist.

Es kann angenommen werden, daß die gesuchten Resonanzeffekte am günstigsten unter diesen Bedingungen erzeugbar sind. Zur Vermeidung der vorher beschriebenen Pseudoeffekte wurde eine Quetschpumpe mit präziser Drehzahlregulierung verwendet, mit der sich außerdem die Umdrehungsgeschwindigkeit innerhalb einer Periodendauer weitgehend konstant halten ließ.

Versuche mit dieser Pumpe zeigten, daß die unerwünschten Pseudoresonanzen tatsächlich stark reduziert werden konnten. Dies zeigte ein Experiment, bei dem ein nicht mit dem Wasserkreislauf in Verbindung stehender Schlauch in die Quetschpumpe eingelegt wurde. Die hier bei Phasenverschiebung registrierten Effekte mußten als Pseudoresonanzen interpretiert werden, da es im Wasserkreislauf keine Pulsationen gab. Nachdem der Schlauch aus der Pumpe entfernt war, die Pumpe also ohne Belastung lief, waren die Pseudoresonanzen so gut wie verschwunden. Als wieder die normale Versuchsanordnung hergestellt war, so daß die Quetschpumpe das

Wasser pulsierend durch den Kreislauf preßte, konnten nun Effekte registriert werden, die etwas deutlicher als die Pseudoresonanzen ausfielen. Um zu prüfen, ob hier echte Konvektionswirkung angenommen werden konnte, wurde nun mit dem Ventil V_3 die mittlere Wasserstromstärke verringert, worauf etwas geringere Temperaturveränderungen registriert werden konnten.

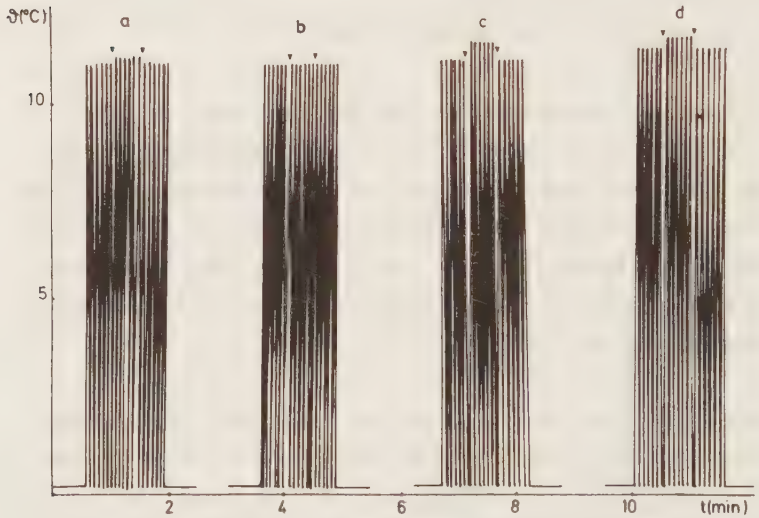


Abb.53. Versuchsschreibung mit Th 6 Blinder Schlauch (a), kein Schlauch in Pumpe (b), hohe (c), niedrige Wasserstromstärke (d). J_{A_0}=80 mA. Bei ' Phasenumschaltung (Näheres s. im Text).

Das Ergebnis dieser Versuchsreihe war in der Tendenz günstig, konnte allerdings noch nicht völlig befriedigen.

Einmal waren immer noch Pseudoresonanzen vorhanden, die eine Interpretation der Resultate erschwerten. Zweitens erschienen die erzeugten Effekte zu gering, um sie zweifelsfrei als echte Resonanzen ansehen zu können.

Daher schien es nötig, zu versuchen, die Pseudoresonanzen ganz zu vermeiden. Ihre Ursache lag, wie bereits ausgeführt, darin, daß bei verschiedenen Phaseneinstellungen an dem mechanischen Impulsgenerator durch den unrunden Lauf der Pumpe unterschiedlich lange Heizimpulse erzeugt wurden. Es mußte also angestrebt werden, die Impulsdauer immer konstant zu halten.

Dies wurde ermöglicht durch ein vom Zentralen Entwicklungslabor für Elektronik der Universität Marburg konstruiertes Relaisschaltgerät. Der Beginn des Heizimpulses wird hierbei wie vorher durch den Microswitch am Impulsgenerator ausgelöst. Nach einer am Relaisschalter einstellbaren Impulsdauer zwischen 0.2 s und 2.0 s wird der Heizstrom, der nach wie vor einem Konstanter entnommen wird, wieder abgeschaltet. So bleibt die Steuerung des Startes der Heizimpulse durch den mechanischen Impulsgenerator, also letztlich durch die Quetschpumpe, erhalten, ebenso wie die Möglichkeit der Phasenverschiebung zwischen Strömungspulsen und Heizimpulsen. Nur die Dauer der Heizimpulse bestimmt nicht mehr die Quetschpumpe, ihre Konstante Einstellung erfolgt durch das Relaisschaltgerät. Mit der in dieser Weise ergänzten Versuchsanordnung wurden nun erneut Resonanzversuche durchgeführt.

Wieder wurde eine Kanülensonde (Th 8) verwendet, die direkt im Hauptarm des Wasserkreislaufes lag. Es wurde eine Heizstromstärke von 80 mA eingestellt. Die Pumpe lief mit einer relativ langsamen Frequenz, die oszillographisch zu 0.54 Hz bestimmt wurde. Es wurden mehrere Versuche ausgeführt, wobei am Relaisschalter verschiedene Tastverhältnisse eingestellt wurden. Dabei ließen sich bei Phasenverschiebung von 0^{o} über 90^{o}, 180^{o}, 270^{o} wieder auf 0^{o} Temperaturveränderungen registrieren. Es fiel auf, daß die niedrigste Temperatur bei verschiedenen Tastverhältnissen jeweils unter einem anderen Phasenwinkel auftrat. Außerdem ließ sich feststellen, daß die Effekte umso deutlicher ausfielen, je größer das Tastverhältnis der Heizimpulse war.

Bevor diese Phänomene erklärt werden, soll von weiteren Experimenten berichtet werden, die folgende Überlegung berücksichtigen: Die Resonanz zwischen Heizimpuls und Strompuls muß umso intensiver sein, je größer der Anteil der Wechselkonvektion in Relation zur Gesamtkonvektion ist. Am günstigsten wird es sein, wenn die Wasserstromstärke im Kreislauf zwischen Null und einem Maximalwert schwankt. So kann die gesamte durch die Heizimpulse zugeführte Wärme für die Resonanz ausgenutzt werden, ohne daß sie durch eine Gleichströmungskomponente von vorneherein reduziert wird. In der Praxis ließ sich diese Situation annähernd herstellen, indem die Druck-Saugpumpe im Thermostaten abgeschaltet wurde. Da nun die Unterstützung durch diese wegfiel und die Quetschpumpe zusätzlich das Wasser durch die passiv mitbewegte Druck-Saugpumpe fördern mußte, floß das Wasser praktisch nur noch während der

Quetschphase.

Die Versuche, die im übrigen unter ähnlichen Bedingungen wie die vorigen durchgeführt wurden, zeigten auch entsprechende Ergebnisse. Wieder ergaben sich Temperatureffekte bei Phasenverschiebung, die umso deutlicher ausfielen, je größer das eingestellte Tastverhältnis war. Außerdem verschob sich der Phasenwinkel, bei dem jeweils die niedrigste Temperatur auftrat, mit Änderung des Tastverhältnisses. Diese Beobachtungen werden aus der abgebildeten Versuchsschreibung deutlich.

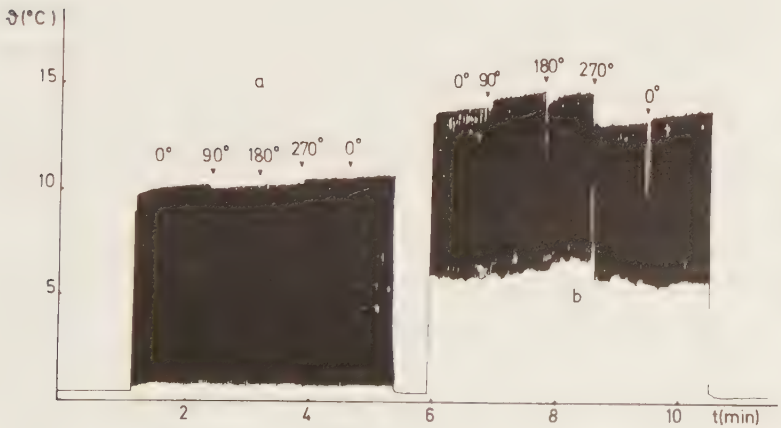


Abb 54 Versuchsschreibung Th 8, $I_{\sim}$ = 80 mA, a = 0 28 (a), 0 86(b) Phasenumschaltung bei ▾. Bei den kurzen Impulsen (a) wird während der relativ langen Heizpausen die Ausgangstemperatur fast wieder erreicht

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob diese Phänomene mit den Eigenschaften von Resonanz in Einklang zu bringen sind. Hierzu ist eine Weiterführung der theoretischen Erörterungen erforderlich. Im Kapitel II wurde nämlich sowohl für die Quellen- als auch für die Senkenergiebigkeit ein sinusförmiger Verlauf angenommen. Im Gegensatz dazu wurden im Experiment für die Heizung Rechteckimpulse variabler Impulsdauer verwendet, die Strömungspulse hatten eine feste, durch die Pumpentätigkeit bestimmte Form. Also hatten im Versuch die beiden Impulse im Gegensatz zur Theorie verschiedene Verläufe, wobei der der Heizimpulse zusätzlich variabel war. Betrachtet man den Strömungspuls, kann man zwei Abschnitte gegenüberstellen. In dem einenAAbschnitt ist die Wasserstromstärke und dadurch die Konvektion klein, im anderen ist die Durchströmung maximal und die Konvektion relativ stark. Diese Abschnitte lassen sich zwar nicht ohne weiteres scharf abgrenzen, aber es ist festzustellen, daß es im Verlauf des Strömungspulses einen Bereich maximal effektiver Konvektion gibt. Nun ist zu erwarten, daß die Resonanz dann auftritt, wenn dieser Bereich mit dem Temperaturmaximum in der Sonde zusammentrifft. Wie bereits besprochen, wird das Temperaturmaximum bei Rechteckimpulsheizung erst gegen Ende des Impulses nach einer Aufheizperiode erreicht. Das heißt, daß jeweils das Ende des Heizimpulses mit der maximalen Konvektion zusammenfallen muß. Dies bedeutet aber weiterhin, daß langdauernde Heizimpulse (also solche mit großem Tastverhältnis) früher gestartet werden müssen, damit ihr Ende auf das Konvektionsoptimum fällt, als Heizimpulse mit kleinem Tastverhältnis. Daraus ergibt sich die

experimentell bestätigte Folgerung (s. Abb. 54), daß bei großem Tastverhältnis höhere Phasenwinkel eingestellt werden müssen, um Resonanz zu erhalten.

Auch das Versuchsergebnis, daß die Resonanzen bei höheren Tastverhältnissen deutlicher werden, kann erklärt werden. Bei relativ langdauernden Heizimpulsen entsteht eine Aufheizkurve, die relativ viel Zeit hat, sich nach steilem Anstieg zunehmend abzuflachen. Es entsteht also ein vergleichsweise breites Temperaturplateau, das gut zu dem ebenfalls breiten Konvektionsmaximum paßt. Ein kurzer Impuls wird im Vergleich dazu zu einer Aufheizkurve führen, die bereits in einer relativ steilen Anstiegsphase abbricht. Dadurch wird einerseits bei gleicher Heizstromstärke eine niedrigere Temperaturerhöhung erreicht, außerdem kann sich kein entsprechendes Plateau ausbilden, was zu einer Verschlechterung der Wechselwirkung mit der Wasserströmung führt. Die folgende Abbildung soll die Zusammenhänge verdeutlichen.

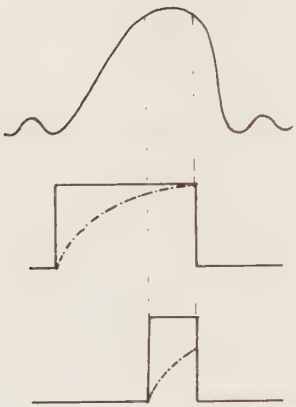


Abb. 55. Phasenlage bei Resonanz. Oben: Strömungspuls. Mitte: Heizimpuls mit großem Tastverhältnis. Unten: Heizimpuls mit kleinem Tastverhältnis. ----- : Aufheizkurven.

Die Resultate der letzten Versuche lassen sich also durchaus mit den theoretisch voraussetzbaren Eigenschaften von Resonanzen in Einklang bringen. Durch Verwendung des Relaisschaltgerätes waren die Pseudoresonanzen ausgeschaltet und für sonstige Fehlerquellen ergab sich kein Anhalt. Es kann also festgestellt werden, daß die in den letzten Experimenten registrierten Temperaturveränderungen als echte Resonanzeffekte anzusehen sind.

VI. Wertung der Ergebnisse

Im theoretischen Teil der Arbeit wurde die Wechselwirkung von Wärmequellen und Senken bei instationären Ergiebigkeiten untersucht. Der theoretisch am einfachsten zu behandelnde Fall, eine konzentrische Anordnung von Kugelflächenquelle und -senke kann in Näherung für die experimentelle Situation als verbindlich angesehen werden. Es wurde gezeigt, daß Resonanz im Sinne einer optimalen Wechselwirkung zwischen beiden dann eintritt, wenn beide Kreisfrequenzen gleich sind und eine Phasenverschiebung um einen bestimmten Winkel γ stattfindet.

Dieses Ergebnis der theoretischen Behandlung bedeutet, daß zur experimentellen Erzeugung der Resonanz, d.h. einer minimalen Temperaturpulsation in der Wärmequelle sowohl die Frequenzgleichheit von Heiz- und Strömungsimpulsen als auch die Einstellung einer bestimmten relativen Phasenlage zwischen den pulsierenden Größen notwendig ist. Im Experiment konnte die Resonanz allerdings nur durch passende Phaseneinstellung erzielt werden. Auf die Einstellung der Frequenzgleichheit, mit der sicherlich eine empfindlichere Resonanzeinstellung möglich gewesen wäre, mußte verzichtet werden, da der eingeplante elektronische Heizimpulsgenerator eine variable und zeitkonstante Einstellung der Frequenz- und Phasenwerte nicht erlaubte.

In den Resonanzversuchen wurde also von vorneherein Frequenzgleichheit zwischen Wasserströmung und Heizung durch Verwendung des mechanischen Impulsgenerators geschaffen. Nach geeigneter Phasenverschiebung ließ sich ein Temperatur-

minimum erzeugen, das der rechnerisch vorausgesagten Resonanz entsprach. Trotz einiger Unterschiede zwischen den in der theoretischen Abhandlung zugrundegelegten Voraussetzungen und den experimentellen Gegebenheiten gelang es somit, Resultate zu erzielen, die sich qualitativ entsprechen. Damit ist das eigentliche Ziel der Arbeit erreicht worden.

Wie bereits in der Einleitung angedeutet, ist das weitergehende Interesse, eine Methode zur arteriellen Durchblutungsmessung zu finden. Vor diesem Hintergrund sind zu den Ergebnissen noch einige Bemerkungen zu machen.

Die Hoffnung, eine unblutige, epikutane Messung der arteriellen Durchblutung ermöglichen zu können, kann vorläufig noch nicht erfüllt werden. Bei den Versuchen mit der auf den Schläuchen plazierten Hautsonde Th 5 konnten die Resonanzeffekte wegen mangelnder Empfindlichkeit nicht erzeugt werden. Letztere zeigten sich nur bei Verwendung von Kanülensonden Th 6 und Th 8, wenn diese direkt im Hauptstromweg des künstlichen Kreislaufes lagen, dessen Kaliber in der Größenordnung mit sehr großen Arterien und der Aorta vergleichbar war. Die maximale im Experiment erreichbare Wasserstromstärke war ca. 17 ml/s, was sich mit sehr großen, herznahen Arterien vergleichen läßt. Allerdings ist für die effektive Resonanzerzeugung neben der Höhe der mittleren Stromstärke auch die Höhe der Pulsamplitude ausschlaggebend, also die Differenz zwischen systolischem Strommaximum und diastolischem Strominimum. Diese ist bei herznahen Arterien sicher höher als im Versuchskreislauf,

wo sie ca. 3 ml betrug. Von daher müßte in großen Arterien Resonanz erzeugbar sein. Die in Abb. 54 demonstrierten Effekte wurden mit einer Pumpfrequenz von ca. 0,5 Hz erzeugt. Im höheren physiologischen Pulsfrequenzbereich wäre eine gewisse Abschwächung der Effekte zu erwarten.

Die Fragestellung in der klinischen Anwendung ist natürlich, welche Blutmenge pro Zeiteinheit durch ein arterielles Gefäß strömt. Andererseits könnten aber auch über die Pulsamplitude sowie die Minimal- und Maximalwerte der Blutströmung innerhalb einer Pulswelle qualitative Aussagen gemacht werden; unter Umständen sind auch quantitative Angaben möglich.

Aufgrund der experimentellen Erfahrungen sind einige Aussagen möglich, welche Maßnahmen eventuell eine praktische Auswertung der Resonanzen ermöglichen würden. Es kann vorgeschlagen werden, Rechteckheizimpulse mit fester Koppelung an die Pulsfrequenz zu verwenden. Dies ist analog zu den hier beschriebenen Experimenten möglich, indem die Anstiegsflanke der Heizimpulse mit einer bestimmten Stelle in der Druckschreibung in zeitliche Übereinstimmung gebracht wird. Einfacher dürfte es sein, die Impulse an die EKG-Schreibung zu koppeln, was anderweitig bereits Anwendung findet. Die Impulse sollten möglichst ein hohes Tastverhältnis und eine hohe Stromstärke haben. Letztere ist durch die Belastbarkeit der Sondenheizung begrenzt. Dabei sollte aber auch beachtet werden, welche Wärmemenge hierdurch dem Blut zugeführt wird. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Heizimpulse unabhängig von etwaigen Schwankungen der Pulsfrequenz eine konstante Impulsdauer haben müssen, um bei

der Resonanzeinstellung störende Temperaturschwankungen zu vermeiden.

Auch hinsichtlich der Sondenkonstruktion sind noch einige Verbesserungen denkbar. Der Resonanzeffekt, der durch die pulsierende Konvektion des vorbeiströmenden Mediums verursacht wird, wird umso deutlicher, je besser die Wärme aus der Sonde abströmen kann. Dies ist durch Verkleinerung der Wärmekapazität des Sondenkörpers zu erreichen. Bei Thermistoren ist das leicht realisierbar, indem man die Heizwendel einspart und den Thermistor durch einen entsprechend hoch gewählten Meßstrom direkt heizt. Diese Maßnahme bedeutet eine wirksame Verkleinerung des Sondenvolumens und damit eine empfindlichere Temperaturanzeige bei Resonanzbedingungen.

Mit einer solchen Anordnung könnte durchaus der Versuch unternommen werden, eine arterielle Durchblutungsmessung durch die Haus vorzunehmen. Eine andere Einsatzmöglichkeit scheint allerdings wesentlich aussichtsreicher zu sein. In der Kardiologie sind Katheteruntersuchungen weit verbreitet und von großer diagnostischer Bedeutung (12). An der Spitze von Kathetern können Thermistoren angebracht werden, wie z.B. bei der Thermodilutionsmethode angewandt (13). Hiermit könnte im Rahmen einer Herzkatheteruntersuchung ohne zusätzliche Belastung des Patienten eine pulsgesteuerte Heizung und Resonanzeinstellung vorgenommen werden. Auf diese Weise ließen sich Aufschlüsse über die Förderleistung des Herzens gewinnen. Auch die großen peripheren Arterien sind dem mit Thermistor versehenen Katheter zugänglich.

Die derzeit klinisch anwendbaren Durchblutungsmeßmethoden sind relativ zahlreich und basieren auf sehr verschiedenen Prinzipien (16, 17). Hier soll nur auf die verschiedenen Indikatorverdünnungsverfahren vergleichend mit der oben vorgeschlagenen Resonanzmethode eingegangen werden. Bei der Farbstoffverdünnungsmethode erhält man nach venöser Injektion ein allmähliches Anfluten des Farbstoffes an der arteriellen Meßstelle und ein langsames Abnehmen, das von einem erneuten Ansteigen durch die Rezirkulation des Farbstoffes unterbrochen wird (1). Der Vorteil dieser Methode ist die exakte Bestimmbarkeit der Kreislaufzeit. Nachteilig ist, daß die Messung nicht oft wiederholbar ist wegen der Kumulierung des Farbstoffes und daß Blut zur Bestimmung der Farbstoffkonzentration aspiriert werden muß. Die Kontrastmittelverdünnungsverfahren zeigen neben der Durchblutung auch die Morphologie, sind aber methodisch nicht einfach (7). Die Isotopenanwendung gestattet sowohl eine Durchblutungsmessung als auch eine morphologische Beurteilung (9) von Herz und Gefäßen, auch bei bestehender Kontrastmittelallergie, sowie die Bestimmung des Blutvolumens (8). Die Thermodilutionsmethode schließlich bietet gegenüber der Farbstoffverdünnungsmethode die Vorzüge, daß kein Blut aspiriert werden muß, der Indikator (kalte Kochsalzlösung) nicht toxisch oder allergisierend wirken kann und die Messung wegen der fehlenden Rezirkulation der eingebrachten Kälte beliebig wiederholbar ist (14). Allerdings müssen zwei verschiedene Katheder vorgeschoben werden, von denen der eine zur Injektion der kühlen Kochsalzlösung dient und der andere den Thermistor für die stromabwärts stattfindende Temperaturmessung trägt. Außerdem wirken sich Wärme- (bzw. Kälte-) verluste auf der Strecke zwischen Injektions- und Meßstelle ungünstig aus.

Bei einer Resonanzmethode könnte eine Injektion bzw. ein zweiter Katheter gespart werden, da direkt der zur Messung verwendete Thermistor beheizt wird und dadurch der Indikator Wärme direkt an der Meßstelle eingebracht würde. Fehler durch Verluste des Indikators zwischen Einbringungs- und Meßort treten so nicht auf. Eine fortlaufende und auch für kurzzeitige Änderungen empfindliche Registrierung der am Thermistor herrschenden Blutströmung wäre über einen längeren Zeitraum möglich, da keine Rezirkulation zu erwarten ist. Durch die Resonanzeinstellung könnten Aufschlüsse über die Höhe der Pulsamplitude gewonnen werden. Die Methode hätte also einige Vorzüge, wenn sie auch nicht so vielseitig wäre wie die anderen angeführten.

Ob eine Durchblutungsmessung mit Hilfe der Resonanzmethode praktikabel ist und welchen Wert die gefundenen Meßwerte besitzen, kann nur durch weitere Untersuchungen geklärt werden. Die Voraussetzungen hierfür scheinen günstig zu sein.

VII. ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit gliedert sich in einen theoretisch-mathematischen und einen praktischen-experimentellen Teil. Im theoretischen Teil werden mathematische Ausdrücke für Temperaturfelder angegeben, die durch Quellen und Senken in einem homogenen und isotropen Vollraum hervorgerufen werden. Ausgehend von der Gleichung für eine Punktquelle, die einen Wärmeimpuls abstrahlt (Fundamentallösung), werden Ausdrücke für instationäre Temperaturfelder abgeleitet, die durch Wechselwirkung von Quellen und Senken mit harmonischen Ergiebigkeitskomponenten entstehen. Für eine konzentrische Anordnung, bei der eine Kugelflächenquelle im Innern einer Kugelflächensenke liegt, wird gezeigt, daß bei Gleichheit der Kreisfrequenzen und einer bestimmten Phasenverschiebung φ ein Minimum der Temperaturerhöhung ϑ (Resonanz) auftritt.

Für die experimentelle Prüfung dieses Resultates wurde ein künstlicher Wasserkreislauf aufgebaut, in dem durch eine Schlauchquetschpumpe eine pulsierende Strömung erzeugt wurde. Als Wärmeleitelemente wurden elektrisch beheizte Sonden verwendet, in denen zur Temperaturmessung Thermistoren im Zentrum der Heizspiralen eingebaut waren. Mittels eines mechanischen Impulsgenerators, der von der Quetschpumpe gesteuert wurde, wurden Rechteckimpulse für die Heizung erzeugt. Diese waren in Amplitude, Tastverhältnis und Phase variabel, hingegen in der Frequenz mit den Pulsationen der Strömung gekoppelt. Nach zahlreichen Versuchen, die zur Herstellung optimaler Versuchsbedingungen dienten, konnte mit einer Kanülensonde, die im Hauptstromweg des Wasserkreislaufes lag, durch Phasenverschiebung während der Heizung ein der Resonanz entsprechendes

Temperaturminimum erzeugt werden. Die Ergebnisse der theoretischen Betrachtungen wurden trotz der nur groben Übereinstimmung zwischen der theoretischen Quellen-Senken-Geometrie und der experimentellen qualitativ bestätigt.

VIII. Zusammenstellung der verwendeten Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

a^2	Temperaturleitzahl
$a_{0, 1, 2}$	Rechengrößen
$A_{0, 1, 2, 3, 4}$	Rechengrößen
$b, b_{1, 2}$	Rechengrößen
$B_{1, 2, 3}$	Rechengrößen
$c, c_{1, 2}$	Rechengrößen
c	spezifische Wärme
c_B	spezifische Wärme des Blutes
C	Integrationskonstante
d	Schalendicke der Kugelsenke
e	Euler'sche Zahl e = 2.7183
F_K	Querschnittsfläche einer Kapillare
$I_{0, 1, 2, 3, 4}$	Rechengrößen
J	Stromstärke
J_{Ho}	Amplitude der Heizstromstärke
K	Senkenkonstante
$K_{1, 2}$	Integrationskonstanten
N_k	Anzahl der Kapillaren in 1 cm^3 Gewebe
p	Rechengröße
q	spezifische Wärmeleistung
q_0	Amplitude der spezifischen Wärmeleistung
q_1	spezifische Quellenergiebigkeit
q_2, q_s	spezifische Senkenergiebigkeit
Q	Wärmeleistung, Ergiebigkeit
Q'	Wärmemenge
Q_0	Amplitude der Wärmeleistung
Q_1	Quellenergiebigkeit
$\bar{Q}_1$	mittlere Gesamtquellenergiebigkeit

Q_{10}	Amplitude der Quellenergiebigkeit
Q_2, Q_s	Senkenergiebigkeit
$\bar{Q}_2$	mittlere Gesamtsenkenergiebigkeit
Q_{20}	Amplitude der Senkenergiebigkeit
r	Abstand des Aufpunktes vom Quellenmittelpunkt
r'	Abstand des Aufpunktes von den Punktquellen
R, R_1	Radius der Kugelflächenquelle
R_2	Radius der Kugelflächensenke
R_H	Heizwiderstand
t, t_m	Zeit
T	Periodendauer
u	Temperatur
u_a	Ausgangstemperatur
v_K	Geschwindigkeit des Kapillarblutes
v_1	harmonische Geschwindigkeitskomponente des Kapillarblutes
v_R	Rechengröße
V_s	Schalenvolumen der Kugelsenke
w	Rechengröße
x, X	Rechengrößen
y	Rechengröße
z	Rechengröße

Griechische Formelzeichen

α	Rechengröße
α_0, α_1	Konvektionskoeffizienten
β	Rechengröße
β_K	Kapillarkonstante
γ	Phasenverschiebung
δ	Rechengröße
ϵ	Rechengröße
ϑ	Temperaturerhöhung
Θ	Polwinkel
λ	Wärmeleitzahl
λ_G	Wärmeleitzahl des Gewebes
ν	Frequenz
ν_1	Frequenz der harmonischen Komponente der Quellenergiebigkeit
ν_2	Frequenz der harmonischen Komponente der Senkenergiebigkeit
π	Kreiszahl
ϱ	Dichte
ϱ_B	Dichte des Blutes
$\varrho_{1,2}$	Abstände des Aufpunktes zum Koordinatenmittelpunkt
τ	Zeit
φ	Azimutwinkel
ω_H	Kreisfrequenz des Heizstromes
ω, ω_1	Kreisfrequenz der harmonischen Komponente der Quellenergiebigkeit
ω_2	Kreisfrequenz der harmonischen Komponente der Senkenergiebigkeit

IX. Literaturverzeichnis

(1) Bender, F.: Farbstoffverdünnungsmethode mit zentraler und peripherer Injektion. Werk-Verlag, München 1966

(2) Carlslaw, H.S. und J.C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press 1959

(3) Eckert, R.G.: Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1966

(4) Golenhofen, K., H. Hensel und G. Hildebrandt: Durchblutungsmessung mit Wärmeleitelementen. Georg Thieme Verlag, Stuttgart 1963

(5) Gröber, H., S. Erk und U. Grigull: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955

(6) Hahn, H.: Thermistoren. R.v.Deckers Verlag, G. Schenck Hamburg/Berlin 1965

(7) Heintzen, P. und J. Bürsch: Kontrastmittelverdünnungsverfahren. Werk-Verlag, München 1966

(8) Hoffmann, G.: Die Anwendung radioaktiver Isotope. Werk-Verlag, München 1966

(9) Kriss, J.P. et al.: Radioisotope angiography. Wide scope of applicability in diagnosis and evaluation of therapy in deseases of the heart and great vessels. Circulation 43:792, 1971

(10) Priebe, L. und E. Betz: Wärmetransport im homogen und isotrop durchbluteten Gewebe. Ärztliche Forschung 23, 18-30, 1969

(11) Rotamesser Handbuch, Firma Rota, Oeflingen 1966

(12) Ross, J. jr.: Cardiac Catheterization. In: Harrison's Principles of International Medicine. McCraw-Hill Kogakusha Ltd. Tokyo 1974

(13) Rutishauser, W., H.P. Krayenbühl, P. Wirz, U.P. Veragut und E. Lüthy: Die Thermodilutionsmethode in der Erfassung der Herzinsuffizienz. Werk-Verlag, München 1966

(14) Rutishauser, W., H. Scheu, M. Rothlin, U. Alsleben und E. Lüthy: Die Thermodilutionsmethode. Werk-Verlag, München 1964

(15) Schaefer-Bergmann: Lehrbuch der Experimentalphysik. Walter de Gruyter Verlag, Berlin/New York 1974

(16) Siegenthaler, W. et al.: Klinische Pathophysiologie. Georg Thieme Verlag, Stuttgart 1974

(17) Wetterer, E.: Der heutige Entwicklungsstand der Methoden zur Registrierung der Blutströmung an Tier und Mensch. Werk-Verlag, München 1964.

Lebenslauf

Am 8.10.1951 wurde ich als Sohn des Arztes Dr. Karl Seitz und seiner Frau Irene, geb. Drebing, in Dörnsteinbach/ Kreis Alzenau, geboren.

1953 verzog die Familie nach Nürnberg, wo ich von 1958 bis 1962 die Wiesenschule besuchte. Anschließend wechselte ich auf den altsprachlichen Zweig des Neuen Gymnasiums Nürnberg über, wo ich am 19.6.1971 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1971 nahm ich das Medizin-Studium an der Philipps-Universität Marburg auf. Die Naturwissenschaftliche Vorprüfung legte ich am 19.9.1972, die Ärztliche Vorprüfung am 7.9.1973 ab.

Das anschließende klinische Studium wurde für mein Semester erstmals nach der Approbationsordnung für Ärzte vom 28.10.1970 durchgeführt. Den ersten Teil des Staatsexamens legte ich am 30.8.1974, den zweiten Teil am 26.8.1976 ab.

Am 10.9.1976 heiratete ich meine Frau Erna, geb. Moderer.

Das praktische Jahr absolvierte ich in der Medizinischen Klinik, der Chirurgischen Klinik und der Frauenklinik der Universität Marburg. Im Oktober 1977 legte ich den dritten Teil des Staatsexamens ab.

Meine akademischen Lehrer waren die Damen und Herren Professoren und Dozenten:
Buchholz, Dauner, Dimroth, Exner, Friederich, Ganz, Graul, Hamelmann, Hensel, Heß, Hildebrandt, Hilgermann, Hort, Ihm, Jacob, Kaffarnik, Karlson, Kipp, Kleinsasser, Knoll, Koecke, Koransky,

Ludwig, Mannheim, Martini, Nultsch, Perst, Petry, Pohlen, Pots, Priebe, Richter, Riecken, Rodeck, Rohen, Schmid, Schmitz-Moormann, Siegert, Solcher, Straub, Troidl, Walcher, Welge-Lüssen, Wesemann, Willenbockel.

Ich erkläre ehrenwörtlich, daß ich die dem Fachbereich Humanmedizin Marburg zur Promotionsprüfung eingereichte Arbeit mit dem Titel: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Wechselwirkungen instationärer Temperatur- und Konvektionsfelder im Physiologischen Institut unter Leitung von Herrn Prof. Dr. med. H. Hensel mit Unterstützung durch Herrn Prof. Dr. rer. nat. L. Priebe ohne sonstige Hilfe selbst durchgeführt und bei der Abfassung der Arbeit keine anderen als die in der Dissertation angeführten Hilfsmittel benutzt habe. Ich habe bisher an keiner in- und ausländischen Medizinischen Fakultät ein Gesuch um Zulassung zur Promotion eingereich noch die vorliegende oder eine andere Arbeit als Dissertation vorgelegt.

Marburg, den 5. December 1977

Rainer Seitz

Ich danke Herrn Prof. Dr. med. H. Hensel, der mir Gelegenheit gab, im Physiologischen Institut zu arbeiten, sowie Herrn Prof. Dr. rer. nat. L. Priebe für die Überlassung des Themas, für viele wertvolle Anregungen, vor allem auch für das große persönliche Engagement, mit dem er mir bei meiner Arbeit jede nötige Unterstützung gab.
Den übrigen Mitarbeitern des Institutes sei für ihre Mithilfe, insbesondere bei der technischen Vorbereitung der Experimente und der Reproduktion der Abbildungen gedankt.

City Schnelldruck, Marcusstraße 10, 8700 Würzburg